جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۳

توابع خاص

۲- ب) $f(x)=|x|$

تابع قسمت «ج» تابع ثابت، تابع قسمت «د» درجه اول و تابع قسمت «الف» درجه دوم می‌باشند.

توابع چندجمله‌ای

۳- راهنمایی: فقط ۵ تابع چندجمله‌ای نیستند. در هر سطر ۲ تابع چندجمله‌ای وجود دارد. خوب دقت کنید! ۳ تابع خطی در این تمرین وجود دارد که یکی از آن‌ها تابع ثابت و یکی‌دیگر از آن‌ها تابع همانی است (یکی هم خطی است ولی نه ثابت و نه همانی است). ضمناً یک تابع قدرمطلق هم در این تمرین وجود دارد.

۴- الف) **راهنمایی:** خطوط عمودی تابع نیستند.

ب) **راهنمایی:** خطوط افقی تابع هستند ولی یک‌به‌یک نیستند.

ج) **راهنمایی:** یک خط از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و خط دیگر از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ عبور می‌کند.

۵- به‌ترتیب از درجه‌های ۱، ۲ و ۳

۶- ب، ج) یک تابع چندجمله‌ای درجه ۳ با دامنه‌ی $(۰,۱۵)$

۷- ب) درجه‌ی ۳

ج) $R_f=\{۰,-۱,۳\}$

د) **راهنمایی:** اگرچه $D_f=D_g=D_h$ و $R_f=R_g=R_h$ می‌باشند، اما برای مساوی بودنِ دو تابع، باید زوج‌های مرتب یکسانی داشته باشند.

۸- ب)

$$۰<x<۱ \Rightarrow x>x^۲>x^۳ \Rightarrow f(x)>g(x)>h(x)$$

$$x>۱ \Rightarrow x<x^۲<x^۳ \Rightarrow f(x)<g(x)<h(x)$$

تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

۹- الف، ج) تابع چندجمله‌ای درجه اول　　ب، د) تابع چندجمله‌ای درجه دوم

راهنمایی: استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h، دارای حجم $\pi r^۲ h$ و مساحت کل $۲\pi r^۲+۲\pi rh$ می‌باشد.

۱۰- الف) **راهنمایی:** مساحت شکل = مساحت مربع + مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

[مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است. (چرا؟)]

ب) **راهنمایی:** مساحت حلقه = مساحت دایره‌ی بزرگ منهای مساحت دایره‌ی کوچک

۱۱- راهنمایی: با کمی دقت در شکل، درمی‌یابیم مساحت مستطیل مساوی با $۲xy$ است. برای پیدا کردن دامنه باید نامعادله‌ی $۲۵-x^۲>۰$ را حل کنیم.

[**پرسش**: چرا $۲۵-x^۲$ نمی‌تواند مساوی صفر باشد؟]

۱۲- ب) پس از ۳ ثانیه گلوله به زمین می‌رسد.

پرسش: در این تمرین (۱۲)، گلوله چه مسافتی را در ثانیه‌ی سوم حرکتش (از $t=۲$ تا $t=۳$ ثانیه) پیموده است؟

پاسخ: ۲۵ متر

۱۳- نقاط تقاطع نمودار تابع f و محور xها: $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$

تابع همانی ـ تابع ثابت

۱۴- راهنمایی: نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را در توابع خطی $(y = ax + b)$، ثابت و همانی به‌دست آورید.

پرسش: اگر در تابعی تغییرات متغیر وابسته برابر با تغییرات متغیر مستقل باشد، آیا آن تابع الزاماً تابع همانی $(y = x)$ است؟

پاسخ: خیر، مثلاً $y = x + ۱$. [به‌طور کلی هر تابع به‌صورت $y = x + c$ که $c \in \mathbb{R}$]

۱۵- سه جمله نادرست هستند، مثلاً قسمت «هـ». (چرا؟)

۱۷- راهنمایی: از ۵ رابطه‌ی داده شده، ۳ رابطه تابع هستند که یکی از آن‌ها تابع ثابت و دیگری تابع همانی است.

پرسش: کدام رابطه‌ها در این تمرین (۱۷) تابع نیستند؟

۱۸- ب) **راهنمایی:** باید دامنه‌اش هم تک عضوی باشد. (چرا؟)

ج) **راهنمایی:** به پرسش انتهای تمرین ۱۷ در کتاب کار توجه کنید.

۱۹- ب) $S(x) = ۱ - x^{۲}$

ج) با توجه به $۰ < x < ۱$ (که در صورت مسأله ذکر شده است) تابع مساحت یعنی $S(x)$ یک‌به‌یک است.

تابع قدرمطلق

۲۰- ب) $R_f = \{۰\}$ ،$R_g = [۰,۱]$ ،$R_h = R_i = [-۱,۱]$

۲۲- الف) **راهنمایی:** باید بخشی از نمودار توابع $f(x) = x$ و $f(x) = -x$ را که بالای محور xها است رسم نمود.

۲۳- الف، ب) یکی از آن‌ها $y = x + ۱$ و دیگری $y = -x - ۱$ است.

۲۴- ب) **راهنمایی:** دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R} - \{۰\}$ است. برای رسم این نمودار توجه کنید که اگر $x > ۰$ باشد آن‌گاه $|x| = x$ و اگر $x < ۰$ باشد آن‌گاه $|x| = -x$.

ج) **راهنمایی:** $\sqrt{u^{۲}} = |u|$

انتقال نمودار ـ رسم نمودار با استفاده از انتقال

۲۷- $x = \frac{۱}{۲}$

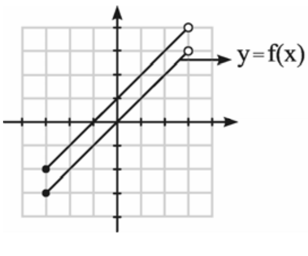
۲۸- ب) مجموعه‌ی اعداد نامنفی

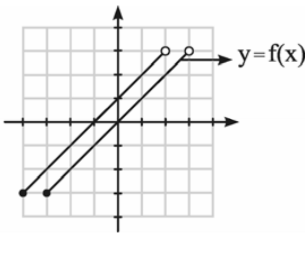
۲۹- الف) دو تابع مساوی‌اند:

$$f(x) = x \Rightarrow f(x) + ۱ = f(x + ۱) = x + ۱$$

نکته: در توابع به فرم $f(x) = x + c$ (که $c \in \mathbb{R}$)، داریم: $f(x + k) = f(x) + k$

ب) $y = f(x)$ را یک بار به اندازه‌ی یک واحد به بالا و بار دیگر به اندازه‌ی یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم.





۳۰- ب) $g(x) = |x|$

۳۱- د) $f(x) = ۰$. نمودار این تابع نسبت به محور xها و همچنین محور yها متقارن است.

۳۲-

$$f(x)=|x| \Rightarrow g(x)=f(-۲x)=|-۲x|=|-۲|\times|x|=۲|x|$$

$$f(x)=|x| \Rightarrow h(x)=-۲f(x)=-۲|x|$$

۳۳- بردها عبارت‌اند از: $[-۲,+\infty)$ ، $[-۱,+\infty)$ ، $[۲,+\infty)$ ، $(-\infty,۳]$

توجه کنید که $|۲-x|=|x-۲|$

۳۴- هیچ‌کدام از توابع، یک‌به‌یک نیستند.

۳۶- باز هم هیچ‌یک از توابع، یک‌به‌یک نیستند. بردها $(-\infty,۱]$ و $[-۱,+\infty)$ می‌باشند. [توجه کنید که برای رسم $h(x)=x^۲+۲x$ ابتدا مانند تمرین قبل (۳۵) از روش مربع کامل کمک بگیرید.]

۳۷- ب) $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$

۳۸- ب) $D_f=(-\infty,۲]$. البته می‌توان $D_f=[۲,+\infty)$ را هم یک جواب دانست.

۳۹- فقط «ج» پاسخ است. [**راهنمایی:** برای رد قسمت «د»، نشان دهید $f(۲+a^۲)=f(-a^۲)$ و برای رد قسمت «ب» نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-۱,۲)$ را رسم کنید.]

۴۰- پیش از هرچیز باید بگوییم که برای هر قسمت از این تمرین می‌توان بی‌شمار تابع مطرح کرد که در شرایط گفته شده صدق کند یعنی جواب‌ها منحصر به فرد نیستند. لیکن ما در این‌جا ساده‌ترین توابع را (با توجه به توابعی که تا به حال شناخته‌اید) مطرح می‌کنیم. توصیه‌ی ما این است که نمودار توابع زیر را (با توجه به دامنه و برد مطرح شده در صورت مسأله) رسم نمایید تا به درک بهتری از این مسأله برسید.

الف) $f(x)=۲x^۲$ یا $f(x)=|۲x|=۲|x|$ (با دامنه‌ی $[-۱,۱]$)

ب) $f(x)=x+۱$ یا $f(x)=-x+۱$ (با دامنه‌ی $[-۱,۱]$)

ج) $f(x)=-x$ یا $f(x)=-۲x$ (با دامنه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$)

د) $g(x)=-x^۲$ یا $g(x)=-|x|$ (با دامنه‌ی $\{-۱,۰,۱\}$)

توجه: در راهنمایی قسمت «د» در صورت مسأله، یک اشتباه تایپی وجود دارد، به این ترتیب که باید به جای $g(x)=|ax|$ تابع $g(x)=a|x|$ جایگزین شود. امیدوارم پوزش من را بپذیرید.

۴۱- الف) ۳۱ و ۷ [**راهنمایی:** ابتدا x را طوری بیابید که $۳-۲x$ برابر با ۷- یا ۵ شود و سپس x به‌دست آمده را در ضابطه‌ی تابع جایگذاری کنید.]

ب) $\left(-\frac{۴}{۳},۰\right)$ [**راهنمایی:** محل تلاقی نمودار $y=f(x)$ با محور عرض‌ها دارای طول صفر است، بنابراین اگر $۳x+۱=t$ فرض شود، آن‌گاه در $f(t)$ باید $t=۰$ باشد. به‌عبارت دیگر باید $۳x+۱=۰$ باشد.]

۴۲- الف) $x^۲-۱$ و $-۴x+۱$ ب) ۱-

۴۳- ج) $f(-۳)=-۷$ [**راهنمایی:** با توجه به قسمت «ب»، این تابع به‌صورت $f(x)=x+b$ است. با استفاده از $f(۳)=-۱$ به راحتی b و ضابطه‌ی تابع معلوم می‌شود.]

۴۴- ب) $\frac{۱}{m}$ [**توجه:** معادله‌ی کلی خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به‌صورت $y=mx$ است که $m\in\mathbb{R}$. اما اگر $m=۰$ باشد، معادله‌ی $y=mx$ به‌صورت $y=۰$ درمی‌آید که این رابطه‌ی خطی، تابع نیست. در نتیجه وقتی گفته می‌شود «تابع خطی گذرنده از مبدأ»، توابع به فرم کلی $f(x)=mx$ با شرط $m\in\mathbb{R}-\{۰\}$ مدنظر است.]

ج) k نامنفی است. (چرا؟)

۴۵- الف)

$$f(۲)=f(۱+۱)=f(۱)+f(۱)\Rightarrow f(۲)=۲f(۱)$$

$$f(۳)=f(۲+۱)=f(۲)+f(۱)=۲f(۱)+f(۱)\Rightarrow f(۳)=۳f(۱)$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $f(n)=n.f(۱)$

تذکر: اثبات علمی‌تر و دقیق‌تر این تمرین به وسیله‌ی استقرای ریاضی انجام می‌پذیرد که شما هنوز آن را نیاموخته‌اید. اما از آن‌جا که این تمرین، مسأله‌ی معروفی بود (و ضمناً اثبات آن به همان شکلی که در بالا نوشتیم نیز قابل‌پذیرش است)، حیفمان آمد آن را به‌عنوان یک مسأله (البته از نوع ستاره‌دار) مطرح نکنیم.

توابع گویا

۴۶- **راهنمایی:** باید نوع انتقال را مشخص کنید، مثلاً:

ب) $h(x)=\frac{۲x+۱}{x}=\frac{۲x}{x}+\frac{۱}{x}=۲+\frac{۱}{x} \Rightarrow h(x)=f(x)+۲ \Rightarrow$ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

۴۷- ج) تابع وارون $f(x)=\frac{۱}{x}$، خودش می‌باشد زیرا اگر نمودار آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنیم، خودش به‌دست می‌آید.

نکته: توابع خطی $y=x$ و $y=-x+c$ توابعی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ هستند که وارون آن‌ها خودشان می‌باشد. تابع $y=\frac{۱}{x}$ نیز تابعی با دامنـه‌ی $\mathbb{R}-\{۰\}$ است که وارونش خودش است.

۴۸- ب) به ازای هیچ مقدار x ج) $R_f=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۲\right\}$ د) ۰ و ۱-

۴۹- ب) ۰ و ۲- ج) **راهنمایی:** به پاسخ قسمت قبل (الف) توجه کنید.

۵۰- الف) **نکته:** هر تابع چندجمله‌ای نوعی از توابع گویا است (چرا؟)؛ هر تابع خطی نوعی از توابع چندجمله‌ای می‌باشـد (چـرا؟) و توابـع ثابـت و همـانی انواعی از تابع‌های خطی هستند. بنابراین: توابع گویا ⊂ توابع چندجمله‌ای ⊂ توابع خطی ⊂ توابع ثابت و همانی

ب) **راهنمـایی:** در صورت کسر از عدد ۲- فاکتور بگیرید. تابع f یک تابع ثابت به‌دست می‌آید اما باید توجه داشته باشید کـه دامنـه‌اش $\mathbb{R}$ نیـست. (چرا؟)

ج) $g(x)=x+۲$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ [**توجه:** لطفاً نمودار قسمت «ج» را در یک دستگاه مختصات دیگر (به جز دستگاه مختصات در صورت مسأله) رسم کنید زیرا دستگاه مختصات صورت مسأله برای رسم نمودار تابع g مناسب نیست.]

د) $f(x)=۱$ و $D_f=\mathbb{R}-\{۱,۲,-۱,-۲\}$

۵۱- ب) ۴ میلیون تومان [**راهنمایی:** باید مبلغ $C(۹۰)-C(۸۰)$ هزار تومان را هزینه کند. (چرا؟)]

ج) باز هم ۴ میلیون تومان. به عبارت دیگر $C(۹۰)-C(۸۰)=C(۹۶)-C(۹۵)$.

د) $D_c=[۰,۱۰۰)$

۵۲- الف) تقریباً ۹۱ درصد ب) ۱/۹ برابر

توابع رادیکالی

۵۳- ج) ۱۴

۵۴- جواب‌ها به‌صورت درهم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۳x}{۴\pi}} \ ، \ f(x)=\sqrt{\frac{x}{۲\pi}} \ ، \ f(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{x}{\pi}} \ ، \ f(x)=\sqrt{x}$$

۵۵- ج) $g(g(۰))=-۱۰$

۵۶- ب) $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$

ج) **راهنمایی:** دامنه‌های f و g برابرند ولی برد یکی از آن‌ها اعداد نامنفی و برد دیگری اعداد نامثبت است.

د) **راهنمایی:** $D_{f^{-۱}}=R_f$ و $R_{f^{-۱}}=D_f$

۵۷- الف) **راهنمایی:** مختصات نقاطی به طول $x=-۳$، $x=-۲$، $x=۰$ و $x=۱$ را بیابید.

ب) **راهنمایی:** مختصات نقاطی به طول $x=۰$، $x=-۱$ و $x=-۴$ را بیابید.

ج) **راهنمایی:** مختصات نقاطی به طول $x=-۱/۵$، $x=-۱$، $x=۰$، $x=۰/۵$ و $x=۳$ را بیابید.

هر سه تابع f، g و h یک‌به‌یک هستند و بردهایشان مجموعه‌ی اعداد نامنفی، مجموعه‌ی اعداد نامثبت و بازه‌ی $[-۱,+\infty)$ می‌باشند.

برای رسم نمودارهای توابع $f^{-۱}$، $g^{-۱}$ و $h^{-۱}$ باید نمودارهای f، g و h را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنید. یادتان باشد که اگر نقطه‌ی (a,b) متعلق به نمودار یک تابع یک‌به‌یک باشد، نقطه‌ی (b,a) متعلق به نمودار تابع وارون آن است. به این ترتیب می‌توانید از نقـاطی که مختصاتشان را در توابع f و g و h پیدا کرده بودید، برای رسم نمودارهای $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ و $h^{-۱}$ کمک بگیرید.

تعیین علامت عبارات درجه اول ـ نامعادلات درجه اول

۵۸- توجه: حتماً همه‌ی قسمت‌ها را با توجه به تعیین علامت عبارات درجه اول پاسخ دهید. مثلاً در قسمت «د» داریم:

$$D = x - \frac{۱}{x} = \frac{x^۲ - ۱}{x} = \frac{(x-۱)(x+۱)}{x}$$

حال به پاسخ‌ها می‌پردازیم. (البته جدول را در این‌جا رسم نمی‌کنیم، بلکه فقط بخشی از پاسخ را ارائه می‌دهیم تا شما به صحت و سقم پاسخ خود پی ببرید.)

ج) $-۲ \le x \le ۰ \Rightarrow C \ge ۰$

د) $-۱ \le x < ۰$ یا $x \ge ۱ \Rightarrow D \ge ۰$

ه) $\frac{-۴}{۳} \le x \le \frac{۴}{۳}$ یا $x > ۱۰ \Rightarrow P \le ۰$

و) $۰ < x \le \frac{۱}{۳} \Rightarrow K \ge ۰$

راهنمایی: در قسمت «ج» از اتحاد مزدوج یعنی $a^۲ - b^۲ = (a+b)(a-b)$ استفاده کنید. در قسمت «ه» حواستان باشد که $x^۲ + ۴x + ۴ = (x+۲)^۲$ دارای ریشه‌ی مضاعف -۲ است و باید $x = -۲$ را در جدول تعیین علامت لحاظ کنید. (اگرچه در طرفینِ $x = -۲$ تغییر علامت رخ نمی‌دهد، اما به ازای این مقدار، عبارت تعریف نشده خواهد بود.) همچنین بدانید $(۲x - ۲۰)^۷$ همواره هم‌علامت با $۲x - ۲۰$ است. در قسمت «و» $|x+۲|$ همواره مثبت است به جز در $x = -۲$ که عبارت برابر با صفر می‌شود. $(x-۱)^۲$ نیز همواره مثبت است اما به ازای $x = ۱$ عبارت تعریف‌نشده می‌شود.

۵۹-

الف) $[۲,+\infty) \cup \{۰\}$ ب) $(-۱,۱] - \{۰\}$ ج) $(-۵,۳]$ د) $(۰,\frac{۳}{۲})$

ه) $(-\infty,۲) \cup [۳,+\infty) = \mathbb{R} - [۲,۳)$ و) $(۱,+\infty)$ ز) $(-\infty,-۱) \cup (-\frac{۱}{۳},۱)$ ح) $(۰,\frac{۳}{۲})$

در قسمت آخر (ح) باید هر کدام از دو نامعادله را به‌طور مجزا حل کرد و سپس از جواب‌ها اشتراک گرفت.

پرسش: اگر در قسمت «ح» داشتیم $۰ \le \frac{۴x}{۲x - ۳}$، آیا تغییری در جواب حاصل می‌شد؟

پرسش: اگر در قسمت «و» علامت $\le$ به علامت $>$ تبدیل می‌شد، آیا تغییری در جواب ایجاد می‌شد؟

۶۰- الف) $(-۵,\frac{۱}{۴}] - \{۰\} = (-۵,۰) \cup (۰,\frac{۱}{۴}[$ [**راهنمایی:** نامثبت یعنی کوچک‌تر مساوی صفر]

ب) $(-\infty,-۱)$ [**راهنمایی:** باید $f(x) > ۰$ باشد.]

ج) $(-۳,۱]$ [**راهنمایی:** باید $\frac{x-۲}{x-۱} \ge \frac{۲x+۳}{۱-x} + ۲$]

۶۱- الف) $(۰/۶,۱/۶]$ ب) $[۲,+\infty)$

۶۲- تمام جواب‌ها $\mathbb{R}$ یا $\varnothing$ هستند.

۶۴- $x < ۲$ [**راهنمایی:** معادله‌ی تابع خطی f را بنویسید و سپس $f(x) > ۰$ را حل کنید.]

توجه: این مسأله یک راه حل تستی هم دارد! با توجه به این‌که $f(۲) = ۰$ بوده و f تابعی خطی است، پس در طرفینِ $x = ۲$، شرایط $f(x) < ۰$ و $f(x) > ۰$ رخ می‌دهد. فقط باید تعیین کنیم کدام‌یک از $f(x) < ۰$ و $f(x) > ۰$ به ازای $x > ۲$ و کدام‌یک به ازای $x < ۲$ رخ می‌دهد. این موضوع را هم به‌کمک $f(۰) = -۱ < ۰$ می‌توان معلوم کرد.

۶۵- الف) $(-\infty,۴]$ ب) $(۲/۵,+\infty)$ ج) $[۲,۳/۵)$

۶۶- الف) هیچ جمله‌ی منفی ندارد. ب) ۲۱ جمله

ج) ۹۹۷ [**راهنمایی:** باید $a_n \le 999$ را حل کرده و بزرگ‌ترین n طبیعی را که در این نامعادله صدق می‌کند به‌دست آورید. سپس مقدار a_n را به ازای این n به‌دست آورید.]

د) ۲۳ جمله [**راهنمایی:** باید $10 \le a_n \le 99$ را حل کرده و تعداد nهای طبیعی که در این نامعادله صدق می‌کند را بیابید.]

ه) ۱۲۸ عدد [**راهنمایی:** اعداد طبیعی مضرب ۷ به صورت $a_n = 7n$ می‌باشند.]

و) ۹۰ عدد [**راهنمایی:** اعداد ۳ رقمی با یکان ۷ عبارت‌اند از ...،۱۲۷،۱۱۷،۱۰۷. این دنباله یک دنباله‌ی حسابی می‌باشد. حال باید $a_n \le 999$ حل شود.]

۶۷- ب) حداقل ۵ بسته برای ضرر نکردن و حداقل ۶ بسته برای سود کردن

ج) حداقل ۱۲ بسته [**راهنمایی:** $0/7x \ge 1/2(1+0/5x)$]

۶۸- ب) نوع اول ج) ۱۲۵۰۰

تعیین علامت عبارات درجه دوم ـ نامساوی‌ها و نامعادلات درجه دوم

۶۹- توجه: در اثبات قسمت‌های مختلف این تمرین باید از روش بازگشتی استفاده کنید. در این روش، از حکم مسأله شروع می‌کنیم و با انجام عملیات بـر روی آن، در نهایت به یک عبارت همواره درست می‌رسیم. آن‌گاه مسیر عملیات را از آخر به اول می‌نویسیم. مثلاً برای اثبات قسمت «ب» به روش زیر عمل می‌کنیم:

ب) $\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{a^2+1} \ge 0 \Rightarrow \frac{a^2+1-2a}{2(a^2+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \ge 0$

واضح است که $\frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \ge 0$ همواره صحیح است زیرا مخرج همواره مثبت و صورت همواره نامنفی است. حال مسیر بازگشتی را می‌نویسیم:

$$\frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{a^2+1-2a}{2(a^2+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{a^2+1}{2(a^2+1)} - \frac{2a}{2(a^2+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{a^2+1} \ge 0 \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}$$

البته مرسوم است که به جای نوشتن مسیر بازگشتی، در همان مسیر اولیه جهت فلش‌ها را برعکس می‌کنند و به‌صورت دو شرطی می‌نویسند، یعنی:

$$\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{a^2+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2a}{2(a^2+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \ge 0$$

ج) $a^2+b^2 \ge 2(a-b-1) \Leftrightarrow a^2+b^2-2a+2b+2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a+2b+1+1 \ge 0 \Leftrightarrow \cdots$

د) **راهنمایی:** به جای $-ab$ عبارت $-2ab+ab$ را جایگزین کنید.

۷۰- ب) **راهنمایی:** با فرض $x \ne y$ و $x, y > 0$ باید نشان دهید $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$. توجه کنید که $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy}$.

۷۱- بخشی از جواب‌ها را مشخص می‌کنیم تا از درستی یا نادرستی پاسخ خود مطلع شوید:

ب) $-3 \le x \le -\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2} \le x \le 3 \Rightarrow B \le 0$

ج) $x \ge -2 \Rightarrow C \le 0$

د) $1 \le x \le 2$ یا $x \ge 7 \Rightarrow D \ge 0$

ه) $\frac{1}{3} \le x \le 1 \Rightarrow P \ge 0$

راهنمایی: در قسمت «د» عبارت x^3-27 را با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ تجزیه کنید.

۷۲-

الف) $\mathbb{R} - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ ب) $\{2\}$ ج) $\mathbb{R}^-$

د) $(-1,2)$ ه) $(-\infty,-3) \cup (0,2)$ و) $(-\infty,-1) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ز) $(-2,2) - \{0\} = (-2,0) \cup (0,2)$ ح) $(-5,1]$

توجه: در قسمت «ح» باید بین جواب‌های دو نامعادله اشتراک بگیرید.

۷۳- الف) $\mathbb{R}-[-۳,۵]=(-\infty,-۳)\cup(۵,+\infty)$

ب) $[۱,۲]\cup\{۰\}$ [**راهنمایی:** باید $f(x)\le ۰$]

ج) $(-\infty,-۲)\cup(\frac{۴}{۳},۷)$

۷۴- الف) ۱۰۹ ب) یک جمله

۷۵- الف) $۰<m<۱۶$ / $۴<m<۶$ [**راهنمایی:** باید $\Delta<۰$ باشد.]

ب) $m>-\frac{۹}{۸}$ / $m>۲$ یا $m<-۶$ [**راهنمایی:** باید $\Delta>۰$ باشد.]

ج) $m\ge -۱$ یا $m\le -۹$ / $-۱\le m\le \frac{۱}{۳}$ [**راهنمایی:** باید $\Delta\ge ۰$ باشد.]

۷۶- الف) $x>۵$ ب) $(۱,۵)$

توجه: وقتی طول اضلاع مستطیل $x+۴$ و $x-۱$ باشد، به این معنی است که الزاماً $x>۱$. (وگرنه اندازه‌ی ضلع صفر یا منفی می‌شود!)

۷۷- الف) چندجمله‌ای درجه اول (تابع خطی) ب) چندجمله‌ای درجه‌ی دوم (سهمی)

ج) حل قسمت «ج» برای شما الزامی نیست و کمی دشوار است. به همین دلیل آن را حل می‌کنیم. اولین نکته‌ای که باید حواستان به آن باشد، این نکته است که $۰<x<۲۰$ (چرا؟)، بنابراین:

$$۰<x<۲۰\Rightarrow -۱۰<x-۱۰<۱۰$$

اگر عددی بین a و $-a$ باشد ($-a<x<a$)، آن‌گاه $۰\le x^۲<a^۲$ می‌باشد. (چرا؟) بنابراین:

$$-۱۰<x-۱۰<۱۰\Rightarrow ۰\le(x-۱۰)^۲<۱۰۰\Rightarrow -۱۰۰<-(x-۱۰)^۲\le ۰\Rightarrow ۰<-(x-۱۰)^۲+۱۰۰\le ۱۰۰\Rightarrow ۰<S\le ۱۰۰$$
$$\Rightarrow R_S=(۰,۱۰۰]\Rightarrow S_{Max}=۱۰۰$$

توجه: یک روش آسان‌تر برای حل این مسأله (به‌دست آوردن برد S)، این بود که ماکزیمم S را معلوم کنیم. بدیهی است ماکزیمم عبارت $-(x-۱۰)^۲+۱۰۰$ برابر با ۱۰۰ است. از طرفی واضح است که مساحت همواره عددی مثبت است، بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}S\le ۱۰۰\\ S>۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۰<S\le ۱۰۰\Rightarrow R_S=(۰,۱۰۰]$$

۷۸- الف) **راهنمایی:** به روش مربع کامل می‌توان نشان داد $۳x^۲+۳x+۲\ge\frac{۵}{۴}$ و $-۲x^۲+۴x-۳\le -۱$.

ب) **راهنمایی:** مینیمم تابع f دارای مختصات $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۴}\right)$ و ماکزیمم تابع g دارای مختصات $(۱,-۱)$ است.

د) **راهنمایی:** خط $y=۲$ را با نمودار f تلاقی دهید. x مربوط به نقاط تلاقی و x هایی که به ازای آن‌ها نمودار تابع f زیر خط $y=۲$ است، پاسخ نامعادله‌ی $f(x)\le ۲$ می‌باشد.
به همین ترتیب خط $y=-۳$ را با نمودار g تلاقی دهید. حال باید x هایی را در شکل پیدا کنید که به ازای آن‌ها نمودار تابع g زیر خط $y=-۳$ است.

۷۹- الف) به روش مربع کامل $-x^۲+x+۲\ge\frac{۹}{۴}$ به‌دست می‌آید.

ب) **راهنمایی:** ابتدا x (طول) نقاط تلاقی تابع $f(x)=-x^۲+x+۲$ با محور x ها (طول‌ها) را پیدا کنید. بدین منظور کافی است معادله‌ی $f(x)=۰$ را حل کنید. ۲ ریشه برای تابع f به‌دست می‌آید. حال به نمودار دقت کنید. بین دو ریشه، تابع f بالای محور x ها است یا پایین آن؟ خارج از دو ریشه چطور؟

ج) $\varnothing$ و $\mathbb{R}$ [**راهنمایی:** خط $y=۲/۵$ را رسم کنید. برای حل نامعادله‌ی $-x^۲+x+۲>۲/۵$ از روی نمودار، باید x هایی را بیابید که به ازای آن‌ها تابع f بالای خط $y=۲/۵$ باشد. برای حل نامعادله‌ی $-x^۲+x+۲\le ۲/۵$ نیز باید x هایی را بیابید که به ازای آن‌ها تابع f زیر خط $y=۲/۵$ یا مساوی آن (در تقاطع با آن) باشد.]

د) $-۲\le x\le ۳$ / $x>۳$ یا $x<-۲$ [**راهنمایی:** خط $y=-۴$ را رسم کرده و طول نقاط تقاطع آن با تابع f را پیدا کنید. اگر نمودار f را درست رسم کرده باشید، طول نقاط تقاطع f و خط $y=۴$، برابر با $x=-۲$ و $x=۳$ به‌دست می‌آید. بهترین راه برای اطمینان از این ریشه‌ها آن است که معادله‌ی $-x^۲+x+۲=-۴$ را حل کنید. حال به نمودار دقت کنید. اگر نمودار f بالای خط $y=-۴$ باشد، داریم $f(x)>۴$ و اگر نمودار f زیر خط $y=-۴$ باشد، داریم $f(x)<-۴$.]

۸۰- الف) $m > \frac{4}{3}$ [**راهنمایی:** باید $\Delta < 0$ و $a > 0$. با حل این دو نامعادله، دو محدوده برای m به‌دست می‌آید که باید اشتراکشان را بیابیم.]

ب) $2 < m < 6$ [**راهنمایی:** در عبارت $(2m-3)x^2 - mx + 1$ باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشند. در نهایت از mهای به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم.]

ج) $m = -4$ [**راهنمایی:** در عبارت $(m+2)x^2 - mx - 2$ باید $\Delta \leq 0$ و $a < 0$ باشند. در نهایت از mهای به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم.]

پرسش: اگر در قسمت «ج» علامت $\leq$ به علامت $\geq$ تبدیل شود، جواب قسمت «ج» چه خواهد بود؟

پاسخ: $\varnothing$ (یعنی به ازای هیچ مقدار m)

د) $m < -1$ [**راهنمایی:** این نامعادله به‌صورت $\frac{(2m-2)x^2 - 4x + m}{x^2 + x + 1} < 0$ درمی‌آید که مخرج آن همواره مثبت است. (چرا؟) پس باید $(2m-2)x^2 - 4x + m < 0$ باشد، یعنی باید در عبارت $(2m-2)x^2 - 4x + m$ داشته باشیم $\Delta < 0$ و $a < 0$. در نهایت از mهای به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم.]

۸۱- الف) $m < -\frac{1}{2}$ [**راهنمایی:** باید $\Delta < 0$ و $a < 0$]

ب) امکان ندارد. [**راهنمایی:** باید همواره $f(x) < 0$ باشد، در نتیجه باید $\Delta < 0$ و $a < 0$]

ج) $m > 3$ [**راهنمایی:** باید $(2-m)x^2 + 4x - (m+1) < 0$ باشد، در نتیجه باید $\Delta < 0$ و $a < 0$]

۸۲- الف) $m < -\frac{1}{2}$ [**راهنمایی:** باید $\Delta < 0$ و $a < 0$]

ب) امکان ندارد. [**راهنمایی:** باید $\Delta < 0$ و $a > 0$]

ج) $-8 < m < 0$ [**راهنمایی:** باید $x^2 + (m-2)x - 3m + 1 > 0$ باشد، در نتیجه باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد که $a > 0$ هست.]

ماکزیمم، مینیمم و ریشه‌های تابع درجه دوم

۸۳- الف) α و β برابر با $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ هستند.

ب) **راهنمایی:** کافی است α و β به‌دست آمده در قسمت قبل را با هم جمع و در هم ضرب کنید. (امیدوارم اتحاد مزدوج را به یاد داشته باشید!)
برای تحقیق $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ در $2x^2 + 2x - 4 = 0$، $2(x-1)(x+2) = 2x^2 + 2x - 4$ کافی است α و β (ریشه‌ها) را از $2(x-1)(x+2) = 0$ به‌دست آورده و $-\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ را از $2x^2 + 2x - 4 = 0$ پیدا کنید.

ج) **توجه:** منظور از قسمت «ج» این است که اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ بوده (به‌شرط $a \neq 0$) و β و α ریشه‌های تابع f باشند، آن‌گاه نشان دهید $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta) = a[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta] = \cdots$$

اگر $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ را در آخرین عبارت جایگذاری کنید، اثبات تکمیل می‌شود.

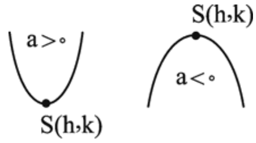
۸۴- **توجه:** در قسمت «الف» در صورت مسأله a را به c تبدیل کنید.

الف) **راهنمایی:** از قسمت «ب» تمرین قبل (۸۳) استفاده کنید.

ب) **راهنمایی:** در قسمت قبل این تمرین، ضابطه‌ی تابع f را به‌دست آورده‌اید. حال معادله‌ی درجه دوم $f(x) = 0$ را حل نموده و α و β را بیابید. در نهایت α و β را در $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ یا به‌عبارت دیگر در $f(x) = -3(x-\alpha)(x-\beta)$ جایگذاری کنید. تعیین علامتش هم که کاری ندارد. خلاص!

۸۵- $f(3) = 4$

راهنمایی: علاوه بر روش ذکر شده در راهنمایی صورت مسأله، روش دیگری هم برای یافتن ضابطه‌ی $f(x)$ وجود دارد. کافی است مختصات ۳ نقطه‌ی داده شده در صورت مسأله را در $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق دهید تا یک دستگاه سه معادله سه مجهول به دست آید. با حل این دستگاه، مقادیر a، b و c معلوم شده و ضابطه‌ی تابع تعیین می‌شود.



۸۶- الف) اگر به شکل‌های مقابل خوب توجه کنید، جواب تمام پرسش‌های مطرح شده در قسمت «الف» را در آن‌ها می‌یابید.

ب) در قسمت قبل دیدیم که رأس سهمی $f(x)=a(x-h)^{۲}+k$ به مختصات (h,k) است. در این‌جا رأس سهمی $S(-۱,۲)$ است، بنابراین $k=۲$ و $h=-۱$ بوده و در نتیجه $f(x)=a(x+۱)^{۲}+۲$ می‌باشد. از طرفی در صورت مسأله گفته شده است $f(x)=x^{۲}+px+q$، یعنی $a=۱$ (a ضریب $x^{۲}$ است). پس معادله‌ی $f(x)$ به‌دست آمد.

ج) $f(x)=-۲x^{۲}-۸x-۴$ / $x\in(-۲-\sqrt{۲},-۲+\sqrt{۲})$

راهنمایی: برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی تابع، به همان روشی که در قسمت قبل توضیح دادیم عمل کنید. فقط یادتان باشد که این‌بار a معلوم نیست اما در عوض می‌دانیم $f(۰)=-۴$. پس از به‌دست آوردن ضابطه‌ی f، نامعادله‌ی درجه دوم $f(x)>۰$ را حل کنید.

۸۷- مشابه تمرین قبل می‌توانید این مسأله را حل کنید، با این تفاوت که باید اطلاعات را از نمودارها استخراج کنید.

$$f(x)=-۳x^{۲}+۳\ ,\ f(x)=۲x^{۲}-۱۲x+۱۸\ ,\ f(x)=x^{۲}+۲x+۳\ ,\ f(x)=-x^{۲}+۲x+۳$$

الف)

$$\begin{cases} S(-۱,۲)\Rightarrow h=-۱,k=۲\Rightarrow f(x)=a(x-(-۱))^{۲}+۲\Rightarrow f(x)=a(x+۱)^{۲}+۲ \\ (۰,۳)\in f\Rightarrow f(۰)=۳\Rightarrow a(۰+۱)^{۲}+۲=۳\Rightarrow a+۲=۳\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=(x+۱)^{۲}+۲=x^{۲}+۲x+۳ \end{cases}$$

ب) **راهنمایی:**

$$\begin{cases} S(۰,۳)\Rightarrow h=۰,k=۳ \\ (۱,۰)\in f\Rightarrow f(۱)=۰ \quad \text{یا} \quad (-۱,۰)\in f\Rightarrow f(-۱)=۰ \end{cases}$$

ج) **راهنمایی:**

$$\begin{cases} S(۳,۰)\Rightarrow h=۳,k=۰ \\ (۲,۲)\in f\Rightarrow f(۲)=۲ \end{cases}$$

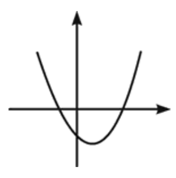
د) **راهنمایی:**

$$\begin{cases} S(۱,۴)\Rightarrow h=۱,k=۴ \\ (۰,۳)\in f\Rightarrow f(۰)=۳ \quad \text{یا} \quad (-۱,۰)\in f\Rightarrow f(-۱)=۰ \quad \text{یا} \quad (۳,۰)\in f\Rightarrow f(۳)=۰ \end{cases}$$

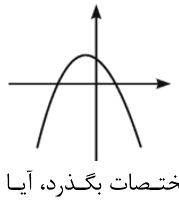
توجه: برای پیدا کردن ضابطه‌های توابع «ب» و «د» روش‌های دیگری هم وجود دارد. در نمودار این دو تابع، نقاط تقاطع نمودار با محور xها معلوم است، در نتیجه ریشه‌های این توابع یعنی α و β مشخص است. با داشتن α و β ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ می‌نویسیم، مثلاً $f(x)=a(x-۱)(x+۱)$ یا $f(x)=a(x-۳)(x+۱)$. حال برای یافتن a کافی است مختصات نقطه‌ی دیگری از نمودار تابع (مثلاً مختصات رأس سهمی) را در ضابطه‌های فوق صدق دهیم تا a و در نتیجه ضابطه‌ی تابع به دست آید.

یک روش دیگر برای یافتن ضابطه‌های توابع «ب» و «د» صدق دادن مختصات ۳ نقطه‌ی متمایز از نمودار در ضابطه‌ی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است. به این ترتیب یک دستگاه سه معادله سه مجهول به دست می‌آید که با حل آن a، b و c و در نتیجه ضابطه‌ی تابع مشخص می‌گردد.

۸۸- الف) **راهنمایی:** وقتی a و c مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه ac و $\frac{c}{a}$ منفی هستند. حال باید نشان دهید اولاً $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ (یعنی تابع f دارای دو ریشه‌ی متمایز است) و ثانیاً $\alpha\beta<۰$ (که α و β ریشه‌های f هستند).



ب) اگر $a>۰$ باشد، نمودار تابع درجه دوم f رو به بالا باز می‌شود. حال اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد، طبق قسمت «الف» باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد یعنی مطابق شکل مقابل، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت و منفی قطع کند. به همین ترتیب اگر $a<۰$ باشد، نمودار تابع درجه دوم f رو به پایین باز می‌شود. حال اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد، طبق قسمت «الف» باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد یعنی مطابق شکل مقابل، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت و منفی قطع کند.



در هر دو حالت، نمودار تابع درجه دوم f از هر ۴ ناحیه‌ی دستگاه مختصات می‌گذرد.

پرسش: آیا عکس قضیه‌ی قبل نیز برقرار است؟ یعنی اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ از هر ۴ ربع دستگاه مختصات بگذرد، آیا الزاماً a و c مختلف‌العلامه‌اند؟

پاسخ: بله. به همان ترتیب با رسم شکل می‌توان فهمید حتماً تابع دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. در نتیجه $\alpha\beta<۰$، پس $\frac{c}{a}<۰$. این بدان معنا است که a و c مختلف‌العلامه‌اند.

۸۹- الف) ۲۰ و ۴۳۰

$$P=-0/5(x^{2}-40x)+230=-0/5[(x-20)^{2}-400]+230=-0/5(x-20)^{2}+430$$

توجه: در این‌جا به تحلیل و تفسیر رابطه‌ی $P=-0/5x^{2}+20x+230$ می‌پردازیم. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی $\mathbb{W}$ است. وقتی x (هزینه‌ی تبلیغات) از صفر تا ۲۰ (میلیون تومان) افزایش یابد، سود (P) از ۲۳۰ تا ۴۳۰ (میلیون تومان) افزایش می‌یابد. اما پس از $x=20$ (یعنی اگر میزان تبلیغات بیش از ۲۰ میلیون تومان شود) مقدار سود P کاهش می‌یابد به‌طوری‌که به ازای $x\simeq 49/5$ (یعنی اگر میزان تبلیغات تقریباً ۴۹/۵ میلیون تومان شود) سود P برابر با صفر می‌شود و اگر x را باز هم بیش‌تر کنیم سود P منفی می‌شود یعنی تجارت خانه ضرر هم می‌کند.

ب) تجارت‌خانه باید تبلیغ کند ولی کم‌تر از ۴۰ میلیون تومان صرف آن نماید. [**راهنمایی:** نامعادله‌ی $P>230$ را حل کنید.]

۹۰- الف) ۱/۲ متر

پرسش: وقتی توپ مجدداً ارتفاع اولیه‌اش (۱/۲ متر) را پیدا می‌کند، فاصله‌ی افقیش از کودک چه‌قدر است؟

پاسخ: ۸ متر

ب) ۴ و ۵/۲ متر [**راهنمایی:** روش مربع کامل]

ج) $3<x<5$ [**راهنمایی:** باید نامعادله‌ی $h(x)<4/95$ را حل کنید.]

۹۱- الف) ۶ و ۸ ثانیه

پرسش: دامنه‌ی هریک از رابطه‌های داده شده در صورت مسأله را تعیین کنید.

ب) تا ۴ ثانیه بومرنگ آرش بالاتر است. [**راهنمایی:** بهتر است یکی از نامعادله‌های $A>B$ یا $B>A$ را حل کنید تا به جواب برسید. واضح است که با حل یکی از آن‌ها جواب نامعادله‌ی دیگر هم به‌دست می‌آید. (چرا؟) حتی جواب $A=B$ هم معلوم می‌شود.]

ج) برای A پس از ۳ ثانیه با ۱۸ متر ارتفاع و برای B پس از ۴ ثانیه با ۱۶ متر ارتفاع [**راهنمایی:** از روش مربع کامل برای هریک از A و B استفاده کنید.]

۹۲- الف) **راهنمایی:** مبلغ = قیمت هر جلد × تعداد جلدهای خریداری شده [در این‌جا n جلد کتاب به قیمت هر جلد $4000-50n$ است.] تابع P در این مسأله چندجمله‌ای درجه دوم می‌باشد.

ب) ۶۸۷۵۰ تومان

ج) ۸۰۰۰۰ تومان به ازای فروش ۴۰ کتاب [**راهنمایی:** روش مربع کامل]

تعیین دامنه‌ی توابع گویا و رادیکالی

۹۳- جواب‌ها به‌صورت درهم:

$$\{3\}\ ,\ \mathbb{R}-\{-3\}\ ,\ \mathbb{R}-\{3,-9\}\ ,(-\infty,1]\ ,\ \left[0,\frac{4}{7}\right]\ ,\ (-\infty,0/6)\ ,\ \mathbb{R}-(1,2]=(-\infty,1]\cup(2,+\infty),$$

$$(-\infty,-3)\cup[3,4)\cup(4,+\infty)\ ,\ [-3,3]-\{-2,2\}=[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]\ ,\ (-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\cup\{0\}$$

راهنمایی: در قسمت «د» $g(x)=\frac{|x-3|}{|x+3|}$ می‌باشد. (چرا؟) در قسمت «هـ» باید $|x|(x^{2}-4)\geq 0$ باشد، یعنی باید $(x^{2}-4)\geq 0$ یا $|x|=0$ باشد. (چرا؟) در قسمت «و» هم به رادیکال و هم به مخرج کسر باید توجه داشت. قسمت‌های «ز» و «ح» اگرچه توابع مساوی به نظر می‌رسند ولی در واقع دامنه‌ها متفاوت‌اند زیرا در قسمت «ز» باید $\frac{1-x}{2-x}$ نامنفی باشد اما در «ح» باید $1-x$ نامنفی و $x-2$ مثبت باشد. در قسمت «ط» فرجه‌ی فرد تأثیری در دامنه ندارد و دامنه‌ی $\sqrt[7]{\frac{x+4}{4-x}}$ با دامنه‌ی $\frac{x+4}{4-x}$ مساوی است. البته در نهایت باید بین این دامنه و دامنه‌ی $\sqrt[4]{x^{2}-9}$ اشتراک گرفت. در قسمت «ی» هم باید بین دامنه‌های $\sqrt[4]{x-x^{2}}$ و $\sqrt{-7x^{2}-3x+4}$ اشتراک گرفت.

اما دامنه‌ی $f(x)=\sqrt[6]{(3x^{2}-2x+5)(-x^{2}+2x-1)}$ فقط شامل یک عدد است. به عبارت‌دیگر تابع f فقط یک نقطه است.

۹۴- فقط دو تا از معادلات جواب دارد (یکی $x=0$ و دیگری $x=2$) و بقیه جواب ندارند.

الف) **(راهنمایی:** داریم $\sqrt{1+3x^2}=-2$. آیا $\sqrt{1+3x^2}$ می‌تواند منفی باشد؟

ب) **(راهنمایی:** دامنه‌ی $y=\sqrt{x}$ برابر با $[0,+\infty)$ است یعنی $x\ge 0$. حال با توجه به $\sqrt{x}\ge 0$ و $\sqrt{x}=-x$، باید $-x\ge 0$ باشد.

ج) **(راهنمایی:** داریم $\sqrt{x}+\sqrt{7x+1}=-5$. توجه کنید که $\sqrt{x}$ و $\sqrt{7x+1}$ هر دو نامنفی‌اند.

د) **(راهنمایی:** دامنه‌ی $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ فقط شامل یک عدد است. حال باید ببینید آیا این عدد در معادله‌ی $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=1$ صدق می‌کند یا نه.

ه) **(راهنمایی:** $\sqrt{3x-6}$ و $|2x-4|$ هر دو نامنفی‌اند. جمع دو عبارت نامنفی تنها زمانی صفر می‌شود که هر دوی آن‌ها (توأمان) صفر باشند.

۹۵- الف) $2<a<4$ [**راهنمایی:** عبارت زیر رادیکال باید همواره مثبت باشد.]

ب) $a\ge 1$ [**راهنمایی:** عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد.]

۹۶- الف) $0<m<4$ [**راهنمایی:** مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد.]

ب) $m<\frac{3}{2}$ [**راهنمایی:** عبارت زیر رادیکال باید همواره مثبت باشد.]

توجه: صورت مسأله‌های ۹۵ و ۹۶ اگرچه در ظاهر فرق دارند ولی در واقع یکی هستند.

۹۷- از بین قسمت‌های «الف» تا «ح» جواب دو قسمت $[-3,5]-\{-1,3,4\}$ است. جواب بقیه ی قسمت‌ها به‌صورت درهم:

$[-2,2]\cup[3,4]$ ، $[1,5]\cup[6,7]$ ، $(-1,3)\cup(4,5]$ ، $[-1,3]\cup[4,5]$ ، $[-2,5],\{1,5\}$

راهنمایی: الف) $f(x)\ge 0$ ب) $f(x)\ne 0$ ج) $f(x)>0$

د) شاید بعضی از شما با ساده کردن $\sqrt[4]{(f(x))^2}$، آن‌را $\sqrt{f(x)}$ بنویسید، اما بدانید این ساده کردن غلط است. (چرا؟) برای پیدا کردن دامنه باید نامعادله‌ی $(f(x))^2>0$ را حل کنید.

ه) $f(x)+1\ge 0\Rightarrow f(x)\ge -1$

و) $f(x)-2\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 2$

ز) باید $f(x+1)\ge 0$ باشد. نمودار f را یک واحد به چپ انتقال داده و سپس مقادیر نامنفی را تعیین کنید.

ح) باید $f(x-2)\ge 0$ باشد. نمودار f را ۲ واحد به راست انتقال داده و سپس مقادیر نامنفی را تعیین کنید.

مسائل ترکیبی

۱- الف) تابع همانی با دامنه‌ی مجموعه‌ی اعداد اول

ب) **راهنمایی:** باز هم تابع همانی ولی با دامنه و برد اعداد نامنفی

۲- راهنمایی: تابع f شامل ۵ نقطه است که ۳ تای آن‌ها مختصات (طول و عرض) صحیح دارند. توجه کنید که برای آن‌که $۳ - x^۲$ طبق مفروضات مسأله عدد طبیعی باشد، باید $۳ - x^۲$ برابر با ۳، ۲ یا ۱ باشد. (چرا؟)

۳- الف) $S = ۶\sqrt[۳]{V^۲}$ [**راهنمایی:** اگر طول یال‌ها (اضلاع) مکعب را a فرض کنیم، حجم آن $V = a^۳$ و مساحت کل آن $S = ۶a^۲$ خواهد بود. حال کافی است از رابطه‌ی $V = a^۳$، a را برحسب V به‌دست آورد و در رابطه‌ی $S = ۶a^۲$ جایگذاری کرد.]

پرسش: تابع حجم مکعب برحسب مساحت کل مکعب را بیابید.

پاسخ: $V = \dfrac{S\sqrt{S}}{۶\sqrt{۶}}$

ب) $S = \sqrt[۳]{۳۶\pi}\,.\sqrt[۳]{V^۲}$ [**راهنمایی:** حجم کره $V = \dfrac{۴}{۳}\pi r^۳$ و مساحت کره $S = ۴\pi r^۲$ است. حال کافی است از رابطه‌ی $V = \dfrac{۴}{۳}\pi r^۳$، r را برحسب V به‌دست آورد و در رابطه‌ی $S = ۴\pi r^۲$ جایگزین کرد.]

پرسش: تابع حجم کره برحسب مساحت کره را بیابید.

پاسخ: $V = \dfrac{S\sqrt{S}}{۶\sqrt{\pi}}$

ج) $P = ۲\sqrt{\pi S}$ [**راهنمایی:** می‌دانیم $S = \pi r^۲$ و $P = ۲\pi r$. حال کافی است از رابطه‌ی $S = \pi r^۲$، r را برحسب S به‌دست آورد و در $P = ۲\pi r$ جایگزین کرد.]

پرسش: تابع مساحت دایره برحسب محیط دایره را بیابید.

پاسخ: $S = \dfrac{P^۲}{۴\pi}$

۴- توجه: توجه کنید که در صورت مسأله قید شده «با توجه به نمودار». به عبارت دیگر باید نمودار هر تابع را رسم نموده و سپس قرینه‌ی آن نسبت به محور y ها را به‌دست آورد [یعنی باید نمودار $y = f(-x)$ را به‌دست آورد]. اگر نمودارهای $y = f(x)$ و $y = f(-x)$ بر هم منطبق بودند، آن‌گاه $f(-x) = f(x)$.

البته برای بررسی $f(-x) = f(x)$ یا $f(-x) \neq f(x)$ می‌توان ضابطه‌ی $y = f(-x)$ را از روی ضابطه‌ی $y = f(x)$ به‌دست آورد [با تبدیل x به $-x$ در ضابطه‌ی $y = f(x)$]، اما در این مسأله این روش مدنظر نبوده است.

۵- الف) $f(x) = x^۲ - x$ [**راهنمایی:** تمرین ۸۷ صفحه‌ی ۸۲]

ب) برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنید اما قسمت‌های زیر محور x ها را نسبت به این محور قرینه کنید. برد تابع $y = |f(x)|$ در این تمرین، مجموعه‌ی اعداد نامنفی است.

برای رسم $y = f(|x|)$ کافی است در نمودار $y = f(x)$ قسمت‌های سمت چپ محور y ها را حذف نموده و قسمت سمت راست را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. در نمودار $y = f(x)$ قسمت سمت راست محور y ها و قرینه‌ی آن نسبت به محور y ها، کلاً نمودار $y = f(|x|)$ را می‌سازند.

۶- الف) ۸ ب) **راهنمایی:** در ضابطه‌ی تابع به جای x، $\sqrt{x}$ قرار دهید.

۷- الف)

$x > 1 \Rightarrow x^5 > x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$

$x = 1 \Rightarrow x = x^2 = x^3 = x^4 = x^5 = 1$

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$

$x = 0 \Rightarrow x = x^2 = x^3 = x^4 = x^5 = 0$

$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x < x^3 < x^5 < 0 < x^4 < x^2 < 1$

$x = -1 \Rightarrow x = x^3 = x^5 = -1 < 1 = x^2 = x^4$

$x < -1 \Rightarrow x^5 < x^3 < x < -1 < 0 < 1 < x^2 < x^4$

فعالیت: با استفاده از رایانه، نمودارهای قسمت «الف» را در یک دستگاه مختصات رسم نموده و در کلاس با معلم و همکلاسی‌هایتان در مورد آن بحث کنید.

ب) پیش از هر چیز توجه کنید دامنه‌ی توابع $y_2 = \sqrt{x}$ و $y_4 = \sqrt[4]{x}$ مجموعه‌ی اعداد نامنفی می‌باشد.

$x > 1 \Rightarrow x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \sqrt[5]{x} > 1$

$x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x} = \sqrt[5]{x} = 1$

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[5]{x} < 1$

$x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x} = \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x} = \sqrt[5]{x} = 0$

$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[5]{x} < \sqrt[3]{x} < x < 0$

$x = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x} = \sqrt[5]{x} = -1$

$x < -1 \Rightarrow x < \sqrt[3]{x} < \sqrt[5]{x} < -1$

فعالیت: با استفاده از رایانه، نمودارهای قسمت «ب» را در یک دستگاه مختصات رسم نموده و در کلاس با معلم و همکلاسی‌هایتان در مورد آن بحث کنید.

۸- ۷ روز [**راهنمایی:** اگر تعداد روزهای سفر را x فرض کنید، این خانواده «$x - 4$» روز در مسافرخانه خواهند بود.]

توجه: در صورت مسأله گفته شده مخارج روزانه‌ی کل اعضای خانواده روزانه ۲۵ هزار تومان است. توجه داشته باشید این هزینه به جز هزینه‌ی اِسکان (محل اقامت) می‌باشد.

۹- **راهنمایی:** جاهای خالی زیر را پر کنید.

الف) $\frac{2}{7} \square \frac{1}{4} \xrightarrow[(x<0)]{\times x} \frac{2x}{7} \square \frac{x}{4}$

ب) $-3 \square -2 \xrightarrow[(x<0)]{\times x} -3x \square -2x$

ج) $-1 \square -2 \xrightarrow[(x<0)]{\div x} -\frac{1}{x} \square -\frac{2}{x}$

توجه کنید که اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، علامت نامساوی تغییر جهت می‌دهد.

۱۰- جواب دو قسمت $\mathbb{R}$، جواب دو قسمت $\varnothing$، جواب یک قسمت {۱/۲} و جواب یک قسمت دیگر $\mathbb{R}$ - {-۱/۷۵} می‌باشد.

۱۱- الف) $x > 5$ [**راهنمایی:** $x + x\sqrt{x} = x(1+\sqrt{x})$]

ب) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ [**راهنمایی:** یک‌بار نامعادله‌ی $\frac{3x-2}{x-1} < 1$ و بار دیگر نامعادله‌ی $\frac{3x-2}{x-1} > -1$ را حل نموده و بین مجموعه جواب‌ها اشتراک بگیرید.]

ج) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ [**راهنمایی:** $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$]

د) $1 < x < 3$ [**راهنمایی:** یک‌بار نامعادله‌ی $\frac{4x-3}{x} < x+2$ و بار دیگر نامعادله‌ی $x < \frac{4x-3}{x}$ را حل نموده و بین مجموعه جواب‌ها اشتراک بگیرید.]

ه) $\sqrt{11} < x < 4$ یا $x < -\sqrt{11}$ [**راهنمایی:** از مجموعه جواب‌های دو نامعادله اشتراک بگیرید.]

۱۲- $۱ < x < ۲$ [**راهنمایی:** باید $f(x) < y$]

۱۳- ب

۱۴- الف) $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ [بد نیست نگاهی به تمرین‌های ۸۳ تا ۸۵ بیندازید تا ایده‌ی این مسأله را بفهمید.]

ب) $f(۳) = -۸$ / ۱، ۲، ۲-

روش اول: نقاط $A(۱,۰)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(-۱,۰)$ در رابطه‌ی $f(x) = -x^۳ + px^۲ + qx + r$ صدق می‌کنند.

روش دوم: در قسمت «الف» دیدیم $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ می‌باشد. در این‌جا نیز می‌دانیم α و β و γ برابر با ۱ و ۱- و ۲ بوده و $a = -۱$ می‌باشد. (چرا؟)

۱۵- الف) ۳ متر ب) ۴/۲ و ۰/۹ متر (۴۲۰ و ۹۰ سانتی‌متر)

راهنمایی: $h(x) = -\frac{۴۰}{۲۷}\left(x^۲ - \frac{۹}{۵}x\right) + ۳$

۱۶- الف) $f(x) = -\frac{۲}{\pi}x^۲ + \frac{۲۰۰}{\pi}x$ و $f(y) = -\frac{\pi}{۲}y^۲ + ۱۰۰y$

راهنمایی: می‌دانیم $۲x + \pi y = ۲۰۰$. از این رابطه یک‌بار x را و بار دیگر y را محاسبه کنید و عبارات به‌دست آمده را در $S_{\text{مستطیل}} = xy$ جایگذاری کنید.

ب) بیشترین مساحت قسمت مستطیلیِ زمین برابر با $\frac{۵۰۰۰}{\pi}$ مترمربع است که به ازای $x = ۵۰$ و $y = \frac{۱۰۰}{\pi}$ رخ می‌دهد.

راهنمایی: $f(x) = -\frac{۲}{\pi}(x^۲ - ۱۰۰x)$ یا $f(y) = -\frac{\pi}{۲}\left(y^۲ - \frac{۲۰۰}{\pi}y\right)$. حال می‌توانید از روش مربع کامل استفاده کنید.

۱۷- الف، ب) $\mathbb{R}^+$ ج، ه) $\mathbb{R}^-$ د) $\varnothing$ و) $(۰,۱]$ ز) $\left[۲,\frac{۸۵}{۲}\right]$ ح) $\{۰\} \cup [۱,+\infty)$ ی) $(۲,+\infty)$

ط) $[۲-\sqrt{۲},+\infty) - [۱,۲+\sqrt{۲}) = [۲-\sqrt{۲},۱) \cup [۲+\sqrt{۲},+\infty)$ ک) $\mathbb{R} - (-۲,۴) = (-\infty,-۲] \cup [۴,+\infty)$

راهنمایی:

الف) باید $x + |x| \neq ۰$ یا به‌عبارت دیگر $|x| \neq -x$

ب) باید $x + |x| > ۰$. توجه کنید که اگر $x > ۰$، آن‌گاه $|x| = x$ و اگر $x < ۰$، آن‌گاه $|x| = -x$

ج) باید $x - |x| \neq ۰$ یا به‌عبارت دیگر $|x| \neq x$

د) باید $x - |x| > ۰$ یا به‌عبارت دیگر $|x| < x$

ه) باید $|x| - x > ۰$ یا به‌عبارت دیگر $|x| > x$

و) باید اولاً $x^۳ \geq ۰$، ثانیاً $۱ - x \geq ۰$ و ثالثاً $\sqrt{۱-x} - ۱ \neq ۰$ یا به‌عبارت دیگر $\sqrt{۱-x} \neq ۱$

ز) باید اولاً $۲x - ۴ \geq ۰$ و ثانیاً $۹ - \sqrt{۲x-۴} \geq ۰$ یا به‌عبارت دیگر $\sqrt{۲x-۴} \leq ۹$

ح) باید اولاً $x \geq ۰$ (چرا؟) و ثانیاً $x - \sqrt{x} \geq ۰$ یا به‌عبارت دیگر $x \geq \sqrt{x}$ [برای حل نامعادله‌ی $x \geq \sqrt{x}$ با توجه به این‌که می‌دانیم $x \geq ۰$ است، طرفین نامعادله را به توان ۲ برسانید.]

ط) باید $\frac{x^۲ - ۴x + ۲}{x - ۱} \geq ۰$

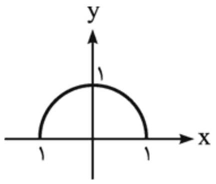
ی) باید اولاً $۲x - ۴ \geq ۰$ و ثانیاً $(x^۳ - ۴x)(x + ۳) \neq ۰$

ک) باید $۳ - |x - ۱| \geq ۰$ یا به عبارت دیگر $|x - ۱| \leq ۳$ [همان‌طور که در مسأله‌ی ۶ صفحه‌ی بعد (مسائل ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش) خواهید دید، با توجه به مثبت بودنِ طرفین، می‌توان طرفین را به‌توان ۲ رساند.]

۱۸- $-۱ \leq x \leq ۱$ [**راهنمایی:** ابتدا تابع این ماشین را معلوم کنید یعنی ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید. در این مسأله در واقع دامنه‌ی تابع مذکور خواسته شده است.]

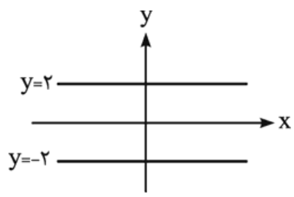
تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش

۱- ۸ رابطه تابع هستند و ۶ رابطه تابع نیستند. برای روابطی که تابع نیستند، کافی است مثالی بیاورید که به ازای یک x، دو y (یا بیش از دو y) وجود داشته باشد. اما برای نشان دادنِ این‌که رابطه‌ای تابع است، باید نمودار آن را رسم کنید و با روش نموداری، تابع بودنش را نشان دهید یا این‌که زوج‌های مرتب آن رابطه را (در صورت متناهی بودن آن) نوشته و از روش زوج مرتب تابع بودنش را بررسی کنید. حال برای راهنمایی شما به چند نکته اشاره می‌کنیم:



در قسمت «ن» رابطه‌ی $x = y^{۳}$ همان $y = \sqrt[۳]{x}$ است. در قسمت‌های «ز» و «ی» توجه کنید که جمع دو عبارت نامنفی، تنها موقعی صفر می‌شود که هر دو (توأمان) صفر باشند. در قسمت «ح» می‌توان این رابطه را به‌صورت یک رابطه‌ی خطی نوشت. اگر در قسمت «ه»، y را برحسب x به‌دست آورید، شاید اشتباهاً به قسمت «و» برسید، اما قسمت «ه» در واقع $y = \pm\sqrt{۱ - x^{۲}}$ است. نمودار $y = \sqrt{۱ - x^{۲}}$ یعنی قسمت «و» نیم‌دایره‌ای به‌صورت روبه‌رو است:

اما نمودار قسمت «ه» دایره‌ی کامل است یعنی قرینه‌ی نیم‌دایره‌ی فوق نسبت به محور xها را نیز دارد. در آخر به قسمت «ل» هم اشاره‌ای کنیم. $y^{۲} = ۴$ یعنی $y = ۲$ یا $y = -۲$. به‌عبارت دیگر اجتماع $y = ۲$ و $y = -۲$ می‌باشد، یعنی نموداری به شکل روبه‌رو:



۲- الف) یک‌به‌یک نیست و بردش $(۲,+\infty]$ است. [**راهنمایی:** به ازای $x > ۲$، داریم $|x - ۲| = x - ۲$ و به ازای $x < ۲$، داریم $|x - ۲| = ۲ - x$. با این شرایط، تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای نوشته و رسم کنید.]

ب) یک‌به‌یک نیست و بردش $(۱,+\infty]$ است. [**راهنمایی:** به ازای $x < ۰$ عبارت $(x - ۳)$ همواره منفی است. (چرا؟)]

ج) یک‌به‌یک است و بردش $\mathbb{R} - (۱,۲]$ است.

د) یک‌به‌یک نیست و بردش $[-\infty,۴)$ است.

ه، و) یک‌به‌یک است و بردش $\mathbb{R}$ است. [**راهنمایی:** قسمت «و» را با توجه به تعریف قدرمطلق، به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.]

۳- توجه: فرض کنید $a > ۰$ است و مسأله را حل کنید. سپس توضیح دهید اگر $a < ۰$ باشد، آیا تغییری ایجاد می‌شود؟

الف) **راهنمایی:** برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ باید نمودار $y = f(x)$ را به اندازه‌ی a واحد به سمت ..... انتقال داد و برای رسم $y = g(x - a)$ باید نمودار $y = g(x)$ را به اندازه‌ی a واحد به سمت ...... انتقال داد. با رسم $y = f(x) + a$ و $y = g(x - a)$ نشان دهید این دو نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ قرینه‌اند.

ب) **راهنمایی:** از قسمت «الف» کمک بگیرید. در قسمت قبل دیدیم اگر تابع f به اندازه‌ی a واحد به سمت (راست / چپ / بالا / پایین) انتقال یابد، تابع وارونش به اندازه‌ی a واحد به سمت (بالا / پایین / راست / چپ) انتقال می‌یابد.

۴- $D_f = [-۳,۲]$ و $R_f = [-۱,۲]$

راهنمایی: ابتدا نمودار هریک از توابع را رسم کنید.

الف) $y = f(x) + ۲$: نمودار $y = f(x)$ به اندازه‌ی ۲ واحد به بالا منتقل می‌شود. واضح است که دامنه تغییر نمی‌کند اما هر y به اندازه‌ی ۲ واحد افزایش می‌یابد، بنابراین ...

ب) $y = f(x) - ۱$: نمودار $y = f(x)$ به اندازه‌ی ۱ واحد به پایین منتقل می‌شود. واضح است که دامنه تغییر نمی‌کند اما هر y به اندازه‌ی ۱ واحد کاهش می‌یابد، بنابراین ...

ج) $y = f(x + ۲)$: نمودار $y = f(x)$ به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌شود. واضح است که برد تغییر نمی‌کند اما هر x به اندازه‌ی ۲ واحد کاهش می‌یابد، بنابراین ...

د) $y = f(x - ۱)$: نمودار $y = f(x)$ به اندازه‌ی ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌شود. واضح است که برد تغییر نمی‌کند اما هر x به اندازه‌ی ۱ واحد افزایش می‌یابد، بنابراین ...

ه) $y = -f(x)$: نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود. واضح است که دامنه تغییر نمی‌کند اما هر y قرینه می‌شود، بنابراین داریم:

$$-۱ \le f(x) \le ۲ \xrightarrow{\times(-۱)} \cdots \le -f(x) \le \cdots$$

و) $y=f(-x)$: نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود. واضح است که برد تغییر نمی‌کند اما هر x قرینه می‌شود، بنابراین داریم:

$$-۳\le -x\le ۲ \xrightarrow{\times(-۱)} \cdots\le x\le\cdots$$

ز) $y=۲f(x)$: در نمودار $y=f(x)$ به ازای همان xهای سابق، هر y دو برابر می‌شود. واضح است که دامنه تغییر نمی‌کند اما برای برد داریم:

$$-۱\le f(x)\le ۲ \xrightarrow{\times ۲} \cdots$$

ح) $y=-\frac{۱}{۳}f(x)$: در نمودار $y=f(x)$ به ازای همان xهای سابق، هر y، $\frac{-۱}{۳}$ برابر می‌شود. واضح است که دامنه تغییر نمی‌کند اما برای برد داریم:

$$-۱\le f(x)\le ۲ \xrightarrow{\times(-\frac{۱}{۳})} \cdots$$

ط) $y=f(۲x)$: در نمودار $y=f(x)$ به ازای همان yهای سابق، xها $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شوند واضح است که برد تغییر نمی‌کند اما برای دامنه داریم:

$$-۳\le x\le ۲ \xrightarrow{\div ۲} \cdots$$

یک نکته‌ی مهم: اگر دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ برابر با D_f باشد، آن‌گاه برای به‌دست آوردن دامنه‌ی $y=f(u)$ باید از این نکته استفاده کنیم که $u\in D_f$.

مثلاً در قسمت «ط»، باید $u=۲x$ در بازه‌ی $[-۳,۲]$ (که همان دامنه‌ی f است) قرار داشته باشد. بنابراین:

$$-۳\le ۲x\le ۲ \xrightarrow{\div ۲} \cdots\le x\le\cdots$$

ی) $y=f\left(-\frac{x}{۳}\right)=f\left(-\frac{۱}{۳}x\right)$: اگر از نکته‌ی قبل استفاده کنیم، داریم:

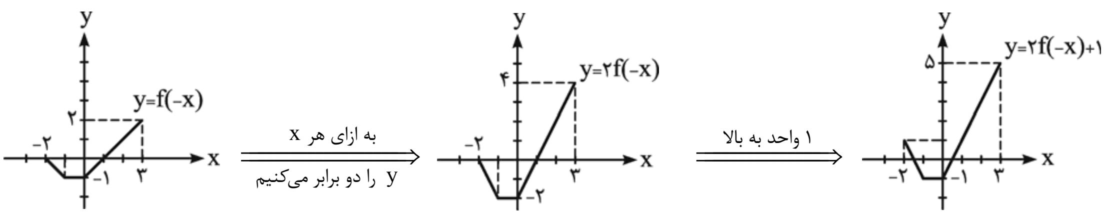
$$-۳\le -\frac{x}{۳}\le ۲ \xrightarrow{\times(-۳)} \cdots\le x\le\cdots$$

واضح است که برد $y=f\left(-\frac{x}{۳}\right)$ همان برد $y=f(x)$ است. [نمودار $y=f\left(-\frac{x}{۳}\right)$ را رسم کنید.]

ک) $y=f(۲x-۱)$: باز هم با فرم $y=f(u)$ مواجه هستیم. پس برد همان برد $y=f(x)$ است اما دامنه برابر است با:

$$-۳\le ۲x-۱\le ۲ \xrightarrow{+۱} -۲\le ۲x\le ۳ \xrightarrow{\div ۲} \cdots\le x\le\cdots$$

ل) $y=۲f(-x)+۱$: حتماً در قسمت «و» نمودار $y=f(-x)$ را رسم کردید. حال اگر در نمودار $y=f(-x)$ به ازای همان xها، مقدار yها را ۲ برابر کنید، نمودار $y=۲f(-x)$ به‌دست می‌آید. در نهایت اگر نمودار $y=۲f(-x)$ را یک واحد به بالا انتقال دهید، نمودار $y=۲f(-x)+۱$ حاصل می‌شود.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه‌ی $y=۲f(-x)+۱$ برابر با $[-۲,۳]$ و برد آن $[-۱,۵]$ می‌باشد. این نمودار را به علت چند مرحله‌ای بودنِ ترسیم، برایتان رسم کردیم اما نمودارهای توابع قبلی را خودتان باید رسم کنید.

۵- الف) دو جواب: $(-\infty,۰]$ و $[۰,+\infty)$

ب) برای به‌دست آوردن رابطه‌ی وارون تابع $y=-x^۲$ باید ابتدا جای x و y را عوض کرده $(x=-y^۲)$ و سپس در این رابطه‌ی جدید، y را برحسب x بیابید. داریم:

$$x=-y^۲ \Rightarrow y^۲=-x \Rightarrow y=\pm\sqrt{-x} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\pm\sqrt{-x}$$

حال باید ببینیم هریک از علامت‌های + و − برای چه شرایطی است:

$$f(x)=-x^۲\ ,D_f=[۰,+\infty)\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]$$

[توصیه می‌شود نمودار تابع فوق را رسم کنید تا به درک بهتری از دامنه و برد و شکل تابع برسید.]

بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۰]$ و $R_{f^{-۱}}=D_f=[۰,+\infty)$. حال بگویید برد $(R_{f^{-۱}})$ کدام‌یک از $f^{-۱}(x)=\sqrt{-x}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt{-x}$ می‌تواند $[۰,+\infty)$ باشد؟ کدام‌یک از این دو تابع می‌تواند تابع وارون $f(x)=-x^۲$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}^{\ge ۰}$ باشد؟

توجه: به همین ترتیب برای $f(x)=-x^{۲}$ با دامنه‌ی $(-\infty,۰]$ عمل کرده و با استفاده از دامنه و برد آن، برد و دامنه‌ی $f^{-۱}$ را تعیین نمایید. حال می‌توانید ضابطه‌ی $f^{-۱}$ در این حالت را نیز تعیین کنید.

ج) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۴]{x}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt[۴]{x}$ / $g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$ و $h^{-۱}(x)=\sqrt[۵]{-x}=-\sqrt[۵]{x}$

پرسش: تابع وارون تابع $f(x)=-x^{۴}$ با هریک از دامنه‌های $[۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰]$ را تعیین کنید.

پاسخ: به ترتیب $f^{-۱}(x)=\sqrt[۴]{-x}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt[۴]{-x}$

۶- **توجه:** راهنمایی صورت مسأله می‌گوید: «اگر طرفین یک نامساوی (یا نامعادله) مثبت باشند، می‌توان طرفین آن را (با خیال راحت) به توان ۲ رساند.» البته می‌توان طرفین را به هر توان مثبت و دلخواهی رساند مشروط بر آن که توان‌ها یکسان باشند مثلاً هر دو طرف به توان ۵ (نه این‌که یک طرف به توان ۳ و طرف دیگر به توان ۷)!

فعلاً در این تمرین، توان ۲ به کارمان می‌آید. ضمناً یادتان باشد $|u|^{۲}=u^{۲}$، مثلاً $|-x+۲|^{۲}=(-x+۲)^{۲}=x^{۲}-۴x+۴$.

الف) $\mathbb{R}-(-۲,-۱)=(-\infty,-۲]\cup[-۱,+\infty)$ [**راهنمایی:** اگر طرفین را به توان ۲ برسانید، پس از ساده کردن، به نامعادله‌ی درجه دوم $x^{۲}+۳x+۲\geq ۰$ می‌رسید.]

ب) $(-۵,۵)$ [**راهنمایی:** $|x|+۱$ همواره مثبت است، بنابراین باید صورت منفی باشد، یعنی باید $|x|>۵$. حال طرفین را به توان ۲ برسانید و ...]

ج) $\mathbb{R}-[-۱,۱]=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

د) $[۰,۲]$

برای به‌دست آوردن دامنه‌ی f باید نامعادله‌ی $۳-|x-۱|\leq ۰$ یا $|x-۱|\geq ۳$ را حل کنیم که در نهایت $D_f=\mathbb{R}-(-۲,۴)=(-\infty,-۲]\cup[۴,+\infty)$.

هم‌چنین برای یافتن D_g باید نامعادله‌ی $|x+۱|-|۲x|>۰$ یا $|۲x|<|x+۱|$ را حل کنیم که در نهایت $D_g=(-\frac{۱}{۳},۱)$.

تذکر: مجدداً تأکید می‌کنم فقط در شرایطی می‌توان طرفین نامعادله را به توان ۲ رساند که از نامنفی بودن طرفین مطمئن باشیم. مثلاً در نامعادله‌ی $|x-۱|<۴x$ نمی‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم زیرا معلوم نیست $۴x$ حتماً نامنفی باشد.

توجه: برای حل نامعادلات قدرمطلقی روش‌های دیگری هم وجود دارد ولی با توجه به دانسته‌های شما در سال دوم دبیرستان، روش فوق بهترین راه برای حل این تمرین می باشد.

۷- الف) ابتدا تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را به‌صورت $f(x)=a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x\right)+c$ می‌نویسیم. ضمناً یادتان باشد $(x^{۲}+kx)=\left(x+\frac{k}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{k}{۲}\right)^{۲}$.

با توجه به این رابطه، عبارت $\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x\right)$ به‌صورت $\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}-\left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲}$ درمی‌آید که اگر آن را در $f(x)=a\left(x^{۲}+\frac{b}{a}x\right)+c$ جایگزین کنیم، در نهایت پس از انجام محاسبات به $f(x)=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ می‌رسیم. از طرفی از تمرین ۸۶ صفحه‌ی ۸۱ می‌دانیم در تابع درجه دوم به فرم $f(x)=a(x-h)^{۲}+k$ نقطه‌ی $S(h,k)$ رأس سهمی می‌باشد. بنابراین $k=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ و $-h=+\frac{b}{۲a}$، یعنی مختصات S رأس سهمی برابر است با $S(h,k)=\left(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a}\right)$.

ب) اولاً ربع سوم؛ ثانیاً $y=ax^{۲}$.

$$a,b>۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow -\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow \text{مؤلفه‌ی اول } S<۰$$

$$\left.\begin{array}{l} b>۰\Rightarrow b^{۲}>۰ \\ a>۰,c<۰\Rightarrow ac<۰\Rightarrow -۴ac>۰ \end{array}\right\}\Rightarrow b^{۲}+(-۴ac)>۰\Rightarrow \Delta>۰ \xRightarrow{a>۰} \frac{\Delta}{۴a}>۰\Rightarrow -\frac{\Delta}{۴a}<۰\Rightarrow \text{مؤلفه‌ی دوم } S<۰$$

بنابراین مؤلفه‌های اول و دوم S (رأس سهمی) منفی می‌باشند، پس S در ربع سوم است. اگر رأس سهمی $y=f(x)$ را به اندازه‌ی $\frac{b}{۲a}$ به راست و به اندازه‌ی $\frac{\Delta}{۴a}$ به بالا انتقال دهیم، (با توجه به مثبت بودنِ $\frac{b}{۲a}$ و $\frac{\Delta}{۴a}$) داریم:

$$y=f\left(x-\frac{b}{۲a}\right)+\frac{\Delta}{۴a}=a\left(x-\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+b\left(x-\frac{b}{۲a}\right)+c+\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a}=a\left(x^{۲}-۲\times\frac{b}{۲a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\right)+bx-\frac{b^{۲}}{۲a}+\frac{b^{۲}}{۴a}$$

$$\Rightarrow y=ax^{۲}-bx+\frac{b^{۲}}{۴a}+bx-\frac{b^{۲}}{۴a}\Rightarrow y=ax^{۲}$$

توجه: در ابتدای پاسخ این تمرین نشان دادیم $f(x)=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}-\frac{\Delta}{۴a}$. به‌دست آوردن $y=f\left(x-\frac{b}{۲a}\right)+\frac{\Delta}{۴a}$ از رابطه‌ی اخیر بسیار راحت‌تر است. این‌کار را انجام دهید.

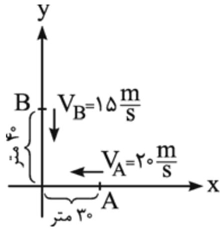
تذکر مهم: این مسأله دشوار بود، به همین علت حلّش را آوردیم. سطح این مسأله کمی بالاتر از کتاب درسی ریاضی ۲ است ولی نکات مهمی در آن بود. در سال‌های آتی بارها و بارها قسمت «الف» را به کار خواهید برد. توصیه می‌کنم نتیجه‌ی قسمت «الف» را از همین حالا در ذهن داشته باشید.

۸- اگر n تا ده هزار تومان روی اجاره‌ی ۱۸۵ هزار تومانی کشیده شود (یعنی کرایه‌ی هر واحد $۱۸۵+۱۰n$ هزار تومان شود)، تعداد n واحد خالی مانده و تعداد $۶۰-n$ واحد اجاره می‌شود. بنابراین درآمد ناشی از اجاره، ماهانه برابر با $(۶۰-n)(۱۸۵+۱۰n)$ می‌شود.

از طرفی هزینه‌ی تعمیرات هریک از این $۶۰-n$ واحد، ماهانه ۵ هزار تومان است که کلاً ماهانه $۵(۶۰-n)$ هزار تومان می‌شود. پس کل درآمد ماهانه‌ی صاحب خانه برابر است با:

$$f(n)=(۶۰-n)(۱۸۵+۱۰n)-۵(۶۰-n)=(۶۰-n)(۱۸۵+۱۰n-۵)=(۶۰-n)(۱۸۰+۱۰n)\Rightarrow f(n)=-۱۰n^{۲}+۴۲۰n+۱۰۸۰۰$$

اگر رأس این سهمی که نقطه‌ی ماکزیمم آن است را بیابیم، نقطه‌ی $S(۲۱،۱۵۲۱۰)$ به‌دست می‌آید. یعنی $n=۲۱$ و $f(۲۱)=۱۵۲۱۰$ است. بنابراین تعداد واحدهای اجاره شده $۶۰-۲۱=۳۹$ واحد، اجاره بهای ماهانه‌ی هر واحد $۱۸۵+۱۰\times۲۱=۳۹۵$ هزار تومان و کل درآمد صاحب‌خانه (پس از پرداخت هزینه‌ی تعمیرات) ماهانه ۱۵ میلیون و ۲۱۰ هزار تومان است. خدا زیاد کند!



۹- الف) $A(t)=۳۰-۲۰t$ و $B(t)=۴۰-۱۵t$

ب) $f(t)=\sqrt{(A(t))^{۲}+(B(t))^{۲}}=\sqrt{۶۲۵t^{۲}-۲۴۰۰t+۲۵۰۰}$

عبارت زیر رادیکال از درجه‌ی ۲ است.

ج) برای آن‌که $f(t)$ مینیمم شود، باید عبارت زیر رادیکال یعنی $۶۲۵t^{۲}-۲۴۰۰t+۲۵۰۰$ مینیمم شود. به ازای $t=۱/۹۲(s)$، مینیمم $f(t)$ رخ می‌دهد که برابر با ۱۴ متر است.

۱۰- ب) $f(x)=۲x^{۲}-۸x+۶$

روش اول: در تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داریم $f(۱)=f(۳)=۰$ و $f(۲)=-۲$. از صدق دادن این داده‌ها در تابع f، یک دستگاه سه معادله سه مجهول (با مجهول‌های a، b و c) به‌دست می‌آید که با حل این دستگاه، مقادیر a، b و c و در نتیجه ضابطه‌ی تابع f به‌دست می‌آید.

روش دوم: نمودار تابع درجه دوم f در نقاط به طول ۱ و ۳ محور xها را قطع کرده است یعنی ۱ و ۳ ریشه‌های تابع درجه دوم f هستند. بنابراین مطابق تمرین ۸۳ همین فصل داریم $f(x)=a(x-۱)(x-۳)$. برای پیدا کردن a، کافی است از $f(۲)=-۲$ استفاده کنیم.

روش سوم: نقطه‌ی $(۲،-۲)$ رأس سهمی است، بنابراین طبق تمرین ۸۶ همین فصل ضابطه‌ی آن به‌صورت $f(x)=a(x-۲)^{۲}-۲$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن a، کافی است یکی از $f(۱)=۰$ یا $f(۳)=۰$ را در ضابطه‌ی اخیر صدق دهیم.

ج) $y=۶$ و $y=۲x-۶$ [**راهنمایی:** ابتدا مختصات محل تلاقی سهمی $f(x)=۲x^{۲}-۸x+۶$ با محور عرض‌ها را بیابید.]

د) **راهنمایی:** تابع f را به‌صورت سه ضابطه‌ای بنویسید و مشخص کنید هریک از $x=-\sqrt{۲}$، $x=\frac{۱}{۲}$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=۵$ متعلق به محدوده‌ی کدام بازه است. [در نهایت به جواب‌های ۶، ۴، ۲/۵ و $۸\sqrt{۲}-۱۰$ می‌رسید.]

۱۱- الف) **راهنمایی:** ۱) اگر $\Delta<۰$ باشد، تابع درجه دوم ریشه ندارد. (یکی از ۵ تابع داده شده این‌گونه است.)

۲) اگر $\Delta=۰$ باشد، تابع درجه دوم یک ریشه‌ی مضاعف دارد. (یکی از ۵ تابع داده شده این‌گونه است.) ریشه‌ی مضاعف همواره برابر با $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد.

پرسش: نشان دهید اگر تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آن‌گاه $\frac{c}{a}$ نامنفی است.

پاسخ: $\frac{c}{a}$ نمی‌تواند منفی باشد، چون اگر $\frac{c}{a}$ منفی باشد آن‌گاه $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ خواهد بود و تابع درجه دوم f دو ریشه‌ی متمایز خواهد داشت. [نگاه کنید به تمرین ۸۸ قسمت الف]

۳) اگر $\Delta>۰$ باشد، تابع درجه دوم دارای ۲ ریشه‌ی متمایز خواهد بود. (سه تابع از ۵ تابع داده شده این‌گونه‌اند.)

تذکر: در هر سه نکته‌ی قبل، عکس قضیه نیز برقرار می‌باشد. به‌عبارت دیگر اگر تعداد ریشه‌های یک تابع درجه دوم معلوم باشد، علامت Δ نیز مشخص می‌شود.

برای تعیین علامت ریشه‌ها (در صورت وجود ریشه یعنی اگر $\Delta \geq 0$ باشد)، به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر $\Delta = 0$ باشد، $x = -\frac{b}{2a}$ ریشه است و علامت آن به راحتی معلوم می‌شود.

اگر $\Delta > 0$ باشد، به سراغ علامت $\frac{c}{a}$ می‌رویم. اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، یک ریشه مثبت و ریشه‌ی دیگر منفی می‌باشد (چرا؟)؛ اگر $\frac{c}{a} = 0$ باشد (یعنی اگر $c = 0$ باشد)، یک ریشه برابر صفر است و ریشه‌ی دیگر $x = -\frac{b}{a}$ می‌باشد (چرا؟)؛ و سرانجام اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد، دو ریشه هم‌علامت‌اند (چرا؟) و علامت آن‌ها همان علامت $-\frac{b}{a}$ است. (چرا؟)

ب) تابع f فقط از ربع سوم نمی‌گذرد. تابع g از هر ۴ ناحیه می‌گذرد. تابع h از ربع‌های اول و دوم می‌گذرد. تابع i فقط از ربع چهارم نمی‌گذرد. تابع y از ربع‌های سوم و چهارم می‌گذرد و بر محور xها (در مرز ناحیه‌ی اول و چهارم) مماس می‌شود.

راهنمایی: علامت a نشان می‌دهد نمودار تابع رو به بالا باز می‌شود ($a > 0$) یا پایین ($a < 0$). علامت Δ نیز همان‌طور که در راهنمایی قسمت «الف» توضیح دادیم، تعداد ریشه‌ها را معلوم می‌کند و درصورتی‌که $\Delta \geq 0$ باشد، با استفاده از علامت‌های $\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ می‌توان علامت ریشه‌ها را تعیین کرد. (در قسمت قبل راجع به آن به‌طور مفصّل توضیح دادیم.) واضح است که با معلوم بودن تعداد ریشه‌ها و علامت آن‌ها و هم‌چنین جهتی که دهانه‌ی سهمی رو به آن طرف است، می‌توان شکل تقریبی نمودار سهمی را رسم کرده و معلوم نمود از کدام نواحی عبور می‌کند.

ج) **توجه:** تابع $y = -۲x^۲ + ۶x - ۴/۵$ را می‌توان به‌صورت $y = -۲(x - \frac{۳}{۲})^۲$ یا به‌عبارت دیگر $y = -۲(x - \frac{۳}{۲})(x - \frac{۳}{۲})$ نوشت. در واقع ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{۳}{۲}$ به این معنا است که این تابع دارای دو ریشه‌ی یکسانِ $x = \frac{۳}{۲}$ است. بنابراین واسطه‌ی حسابی آن‌ها ۱/۵ و واسطه‌ی هندسی آن‌ها $\pm ۱/۵$ است. اما در سایر توابع داریم:

$$\text{تابع } f: ۲ = -\frac{-۴}{۲(۱)} = -\frac{b}{۲a} = \frac{\alpha+\beta}{۲} = \text{واسطه‌ی حسابی} \ / \ \pm\sqrt{۲} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\alpha\beta} = \text{واسطه‌ی هندسی}$$

تابع g واسطه‌ی هندسی ندارد (چرا؟) ولی واسطه‌ی حسابی آن $\frac{۴}{۳}$ است. تابع h نه واسطه‌ی حسابی دارد، نه واسطه‌ی هندسی. در تابع i واسطه‌ی حسابی $-۱/۵$ و واسطه‌ی هندسی $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.