

## جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۲

### مفهوم رابطه - نمایش رابطه

$$۱- ه) \text{ متر } \frac{۷۰ + ۴۰}{۲} = ۵۵$$

۳- ج) ۲ و ۳

۴- **راهنمایی:** اگر تعیین کنید رابطه‌ی متعلق به کدام ظرف، رابطه‌ی خطی است، آن‌گاه معلوم می‌شود که نمودار متعلق به ظرف دیگر، منحنی است. ضمناً از دو نمودار مشخص می‌شود که هر دو رابطه، تابع‌اند.

۵- د) ۲۱ تمرین - به‌طور متوسط ۳ تمرین در روز

ه) چون تعداد مسائل حل شده و تعداد روزها اعداد حسابی هستند.

۶- ج) به‌طور در هم: ۳۰۰، ۴۰۰ و ۴۵۰

ه) **راهنمایی:** خط  $y = ۳۵۰$  چند بار نمودار را قطع می‌کند؟

و) **راهنمایی:** کدام خط افقی، نمودار را دقیقاً در سه نقطه قطع می‌کند؟

ز) **راهنمایی:** در مدت توقف واضح است که فاصله‌ی تغییری نمی‌کند، بنابراین برای پاسخ به این قسمت باید پاره‌خط‌های افقی در نمودار را بیابیم و از آن بخش‌های نمودار که افقی هستند اطلاعات را بیرون بکشیم.

ح) **راهنمایی:** جایی که شیب نمودار منفی است (یعنی با افزایش زمان، فاصله کاهش می‌یابد) به این معناست که علی و فاطمه در حال برگشت به سمت خانه هستند. این اتفاق (برگشت به سوی خانه و کاهش فاصله تا آن‌جا) دوبار رخ داده است که مرتبه‌ی اول آن به دلیل بارش نگرگ بوده است. با استفاده از همین بخش از نمودار می‌توان به قسمت «ح» پاسخ داد.

### زوج مرتب

۷ و ۸- به صورت در هم: ۱، ۳، ۶ و ۰

۹- ب)  $\{۶\}$  و  $\{۲۰۵\}$

۱۰- ب) مجموعه‌ی تمام شماره پلاک‌های خیابان صد و یکم - مجموعه‌ی شماره‌ی تمام خیابان‌هایی که در آن‌ها پلاک ۱۰۱ وجود دارد.

### مفهوم تابع

$$۱۱- \text{راهنمایی: } \sqrt{۴} = ۲ \text{ و } (\sqrt{۲})^{-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲- ج) در  $R_۲$  زوج مرتب  $(c, ۲)$  را حذف کنید.

**توجه:** قسمت «ج» را پس از آموزش مبحث «دامنه و برد توابع» حل کنید.

۱۳- ۳ نمودار، نمودار تابع نیست.

۱۴- **راهنمایی:** خط  $y = c$  تابع است ولی خط  $x = c$  تابع نیست. ( $c \in \mathbb{R}$ )

۱۶- خیر

۱۷- الف) **راهنمایی:** باید  $a^۲ + ۱۰a = ۲۴$  باشد، یعنی  $a^۲ + ۱۰a - ۲۴ = ۰$ . از این معادله دو مقدار برای  $a$  به دست می‌آید اما یکی از آن‌ها قابل قبول نیست. توجه داشته باشید که  $a + ۱$  نباید هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲ یا ۳ را ایجاد کند. (چرا؟)

$$ب) b = -۱$$

۱۸- **راهنمایی:** به‌عنوان مثال در قسمت «ج» باید بررسی کنید در هر روز هفته چند درس در برنامه‌ی کلاسی وجود دارد. (آیا در یک روز بیش از یک درس در برنامه‌ی کلاسی وجود دارد؟)

برای بررسی قسمت‌های «ی» و «ک» به این پرسش پاسخ دهید که عددی مثل ۱ (یا ۶۴ یا هر عدد مثبت دیگر) چند ریشه‌ی دوم و چند ریشه‌ی سوم دارد.

**پرسش:** تفاوت قسمت‌های «ز» و «ح» در چیست؟

**پاسخ:** دمای هوا در یک روز، مقدار ثابتی نیست ولی بیش‌ترین دمای هوا در هر روز یک عدد ثابت است.

۱۹- الف) رابطه‌ی  $R_1$  دارای ۳ زوج مرتب است و تابع نیست.

ب) رابطه‌ی  $R_2$  دارای ۲ زوج مرتب است و تابع است.

ج) رابطه‌ی  $R_3$  دارای ۳ زوج مرتب است و تابع است.

**توجه:** البته تعداد زوج‌های مرتب هیچ ارتباطی با تابع بودن یا تابع نبودن ندارد! ما فقط برای راهنمایی به شما، این اطلاعات را افشا کردیم.

### دامنه و برد تابع

۲۰- د) **راهنمایی:** یک روش برای به‌دست آوردن دامنه از روی نمودار، این است که نمودار رابطه را روی محور  $X$  ها تصویر کنیم. مثلاً در قسمت «د» اگر تصویر تمام نمودار روی محور  $X$  ها را به‌دست آوریم، کل محور  $X$  ها حاصل می‌شود. بنابراین دامنه‌ی این تابع برابر است با ... برای به‌دست آوردن برد نیز می‌توان نمودار رابطه را روی محور  $Y$  ها تصویر کرد. در این تمرین اگر نمودار را بر محور  $Y$  ها تصویر کنیم، فقط ۳ عدد حاصل می‌شود. بنابراین برد این تابع برابر است با ...

۲۲- **راهنمایی:** یک رابطه، تابع نیست. سه رابطه‌ی دیگر تابع‌اند که در دو تای آن‌ها دامنه  $\{0, 1, 2\}$  و برد  $\{1, 2, 3\}$  است. فقط یک رابطه، تابعی با دامنه‌ی  $\{1, 2, 3\}$  و برد  $\{0, 1, 2\}$  است.

۲۳- فقط یکی از گزینه‌ها امکان‌پذیر نیست. [توجه کنید که تعداد اعضای دامنه‌ی تابع نمی‌تواند کم‌تر از تعداد اعضای برد تابع باشد.]

**پرسش:** آیا می‌توان گفت که قطعاً برد تابع «ج» یک مجموعه‌ی تک عضوی است؟ توضیح دهید.

۲۴- فقط «ج» وجود دارد. حال باید نشان دهید چرا سه رابطه‌ی دیگر وجود ندارند.

۲۵- **راهنمایی:** رابطه‌ای با ۱۳ نقطه (۱۳ زوج مرتب) به دست می‌آید که تابع نیست.

۲۶- بردها:  $\{2, 4, 6\}$  و  $\{1, 2, 3\}$

۲۷- **توجه:** همواره اعضای دامنه عبارت‌اند از مؤلفه‌های اول و اعضای برد عبارت‌اند از مؤلفه‌های دوم. اما هیچ الزامی وجود ندارد که مؤلفه‌های اول را با محور افقی و مؤلفه‌های دوم را با محور عمودی نشان دهیم. البته معمولاً مؤلفه‌های اول را با محور افقی و مؤلفه‌های دوم را با محور عمودی نشان می‌دهیم (و اگر صورت مسئله در این مورد چیزی نگفته باشد، همین وضعیت را طبق قرارداد در نظر می‌گیریم) اما بعضاً مثل همین تمرین ممکن است محور عمودی نمایانگر مؤلفه‌های اول و محور افقی نمایانگر مؤلفه‌های دوم اتخاذ شود.

### توابع خطی

۲۸- ب) بله، برای آن‌که رابطه‌ی خطی، تابع نباشد باید معادله‌ی آن به صورت  $x = k$  باشد ( $k \in \mathbb{R}$ )، که چنین معادله‌ای هرگز از معادله‌ی  $y = ax + b$  به‌دست نمی‌آید. (چرا؟)

۲۹- **توجه:** ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد اما ترتیب مؤلفه‌ها در زوج مرتب تأثیر گذار است و می‌تواند آن را تغییر دهد (مگر آن‌که نقطه‌ی متناظر با زوج مرتب بر روی نیمساز ربع اول و سوم باشد).

۳۰- **راهنمایی:** مسافت برحسب کیلومتر را با متغیر  $X$  و میزان کرایه برحسب تومان را با متغیر  $Y$  نشان دهید.

۳۱- الف) **راهنمایی:** به دامنه‌ها توجه کنید.

ب) کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی برد، ۲ است.

۳۲- الف) **راهنمایی:** ابتدا مشخص کنید با هر لیتر بنزین چه مسافتی طی می‌شود. این عدد همان شیب خط در این رابطه‌ی خطی است. [آیا می‌دانید چرا این رابطه، خطی است؟]

ب) دنباله‌ی حسابی است.

ج، د) همان‌طور که در قسمت «الف» تمرین ۳۱ هم دیدید، مجموعه‌ی جملات هر دنباله‌ی حسابی، برد یک رابطه‌ی خطی با دامنه‌ی  $\mathbb{N}$  است.

۳۳- الف) **راهنمایی:** ابتدا از روی نمودار مشخص کنید میزان بدهی قبل از پرداخت اولین قسط چه قدر بوده است. اختلاف این مقدار و قیمت اتومبیل برابر با مبلغ پیش‌پرداخت است.



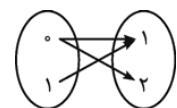
- ج) **راهنمایی:** توجه کنید که اقساط به صورت ماه به ماه پرداخت می شود و در فاصله‌ی زمانی بین دو قسط هیچ پولی پرداخت نمی شود.
- د) **راهنمایی:** هم دامنه و هم برد، مجموعه‌ای ۷ عضو هستند که کوچک‌ترین عضو هر کدام از آن‌ها، صفر است.
- ه) **راهنمایی:** زمانی پرداخت قسط قطع می شود که بدهی برابر با صفر گردد. [ضمناً این عدد (جواب این قسمت) بزرگ‌ترین عضو دامنه نیز هست].
- ۳۴- سه رابطه، تابع خطی اند به معادلات:  $y = -x + 3$ ،  $y = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$  و  $y = x + 1$ .
- ۳۵- الف) **راهنمایی:** مانند تمرین قبل (۳۴) حل می شود. [نگاه کنید به قسمت «د» تمرین قبل]
- ب) **راهنمایی:** در واقع عرض از مبدأ (مقدار ثابت) و شیب (ضریب  $x$ ) خواسته شده است. (چرا؟)
- ج) **راهنمایی:** مقدار  $y$  را به ازای  $x = 73$  بیابید.
- د) **راهنمایی:** مقدار  $x$  را به ازای  $y = 8200$  بیابید.
- ۳۶- الف)  $3000x - 2000000 = \text{سود}$
- ب) **راهنمایی:** میزان سود را به ازای  $x = 600$  و  $x = 750$  به دست آورید. [اگر پاسخ عددی منفی شد، سود منفی به معنای ضرر است].
- ج) ۶۶۷
- ۳۷- **راهنمایی:** توجه کنید که قسمت «ب» به نوعی مشابه با قسمت «الف» است زیرا در قسمت «ب» نیز آب خروجی دارای سرعت ثابت می باشد.

### وارون یک رابطه

- ۳۸- دو گزینه درست و دو گزینه نادرست
- ۴۱- **نتیجه:** دامنه‌ی  $R^{-1} = \text{برد } R$ ؛ برد  $R^{-1} = \text{دامنه‌ی } R$
- ۴۲ و ۴۳- **راهنمایی:** قبل از رسم  $R^{-1}$  باید ابتدا نیمساز ربع اول و سوم یعنی  $y = x$  را رسم کنید و سپس نمودار  $R$  را نسبت به آن خط قرینه کنید.
- ۴۴- **توجه:** سعی کنید حتماً به قسمت‌های «الف» تا «د» درست پاسخ دهید (که کار چندان سختی هم نیست). اگر به این قسمت‌ها درست پاسخ دهید، خودبه‌خود به ۳ پرسش بعدی و هم‌چنین به قسمت اعظم تمرین ۴۵ درست پاسخ خواهید داد.
- ۴۵- **توجه:** در قسمت‌های «ه» و «و» حتماً دقت کنید. توصیه می‌کنیم در چرک‌نویس، نمودار هریک از نیم‌خط‌های گفته شده (یعنی نیمساز ربع دوم و نیمساز ربع چهارم) را رسم کرده و با قرینه کردن آن‌ها نسبت به خط  $y = x$ ، تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

### توابع یک‌به‌یک

- ۴۶- الف) **راهنمایی:** با توجه به وجود  $(10a^2 + 2a)$  و  $(10 \cdot 3)$  در رابطه‌ی  $R$ ، شرط تابع بودن چیست؟ اگر معادله‌ی درجه دوم حاصل را حل کنید، دو مقدار برای  $a$  به دست می‌آید. اما یکی از این دو مقدار غیر قابل قبول خواهد بود. [با امتحان کردن هر ۲ مقدار در رابطه‌ی  $R$ ، خواهید فهمید چرا یکی از این ۲ مقدار قابل قبول نیست].
- ب) **راهنمایی:** برای تابع بودن باید  $(30a + b) = (30 \cdot -1)$  و برای یک‌به‌یک بودن باید  $(a - b \cdot 2) = (10 \cdot 2)$ . [توضیح دهید چرا].
- ۴۷- **راهنمایی:** ۲ رابطه تابع یک‌به‌یک هستند. یک رابطه اصلاً تابع نیست و یک رابطه تابع هست ولی یک‌به‌یک نیست. ضمناً در قسمت «الف» توجه کنید که دارای ۳ زوج مرتب است. (چرا؟)
- ۴۸- **توجه:** برای رسم تابع وارون تابع یک‌به‌یک، ابتدا خط  $y = x$  را رسم کنید تا سپس با رسم قرینه‌ی نمودار تابع نسبت به خط  $y = x$ ، نمودار تابع وارون به دست آید. [البته واضح است که این نمودار به‌طور تقریبی رسم می‌شود].
- ۵۰- سه رابطه‌ی یک‌به‌یک [توجه: در قسمت «و» مکعب مربع عدد  $a$  و مکعب مربع عدد  $-a$  را بیابید.  $(a \neq 0)$ ]




- ۵۱- ج) **راهنمایی:** یک خط عمود بر  $y = x$  مثال برزید.

۵۴ -  $(R^{-1})^{-1} = R$

**بازه (فاصله)**

۵۵ - قسمت آخر  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

۵۶ -  $R^{\leq 0} = (-\infty, 0] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$  

۵۹ -  $[-1, 2)$ ،  $[1, 3]$ ،  $[-1, 1)$ ،  $(-\infty, 1)$  و  $(2, +\infty)$

۶۰ -  $\frac{1}{3} \leq x < 3$

۶۱ - **راهنمایی:** راهنمایی قسمت «د» تمرین ۲۰ را مجدداً بخوانید.

دامنه و برد قسمت آخر:  $(-\infty, +\infty)$  و  $(1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$   $\mathbb{R} - (-1, 1]$

۶۲ - الف) **راهنمایی:** یک خط از نقاط  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌گذرد و خط دیگر از نقاط  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  عبور می‌کند.

**ضابطه (نمایش جبری) تابع**

۶۳ - دامنه‌ی تابع  $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$  است.

۶۴ -  $D_g = R_g = \mathbb{R}$  و  $g(x) = x$

۶۵ - ضابطه‌ی یکی از توابع  $f(x) = 2x - 1$  است.

۶۷ - اولاً: اعضای برد هر تابع با دامنه‌ی  $\mathbb{N}$ ، یک دنباله را ایجاد می‌کنند.

ثانیاً: برای یادآوری دنباله‌های مثلثی و مربعی مجدداً به فصل اول تمرین‌های ۱۰ و ۱۱ باز گردید.

۶۸ و ۶۹ - ج، د)  $[-1, 2)$ ،  $[-1, 3)$ ،  $(-\infty, 2)$  و  $(-\infty, 1)$

۷۰ - **راهنمایی:** با توجه به دامنه‌ی  $\{0, 1\}$ ، دامنه‌ها و بردهای  $f$  و  $g$  یکسان به‌دست می‌آیند (هم در قسمت الف و هم در قسمت ب)، اما برای برابر بودن

دو تابع، باید  $f$  و  $g$  زوج‌های مرتب یکسان داشته باشند.

۷۱ - ج)  $-10/5$

د) فقط باید مقدار  $x$  را به ازای  $y = 1$  به‌دست آورید که جواب موردنظر  $x = -\frac{1}{3}$  به‌دست می‌آید. [برای به‌دست آوردن سایر اعضای دامنه، به

جدول داده شده در مسأله نگاهی بیندازید.]

۷۲ - ب) **راهنمایی:** اگر دامنه  $[-1, 2]$  باشد، برد تابع  $[-1, 5]$  خواهد بود.

ج)  $x = -2y + 3$  با دامنه‌ی  $[-1, 5]$  و برد  $[-1, 2]$

۷۳ - الف) طبق صورت مسأله اگر  $\Delta h = 1(\text{km})$  باشد،  $\Delta T = -5(^{\circ}\text{C})$  است. پس  $\frac{\Delta T}{\Delta h} = -5$  عددی ثابت است، یعنی رابطه‌ی بین  $h$  و  $T$  خطی است.

ب) **راهنمایی:** باید رابطه‌ای به‌صورت  $T = ah + b$  بنویسید (یعنی  $a$  و  $b$  را تعیین کنید). با کمی دقت در صورت مسأله متوجه می‌شوید که شیب

این رابطه‌ی خطی  $-5$  و عرض از مبدأ آن  $20$  است. [البته می‌توانید معادله‌ی خطی را نیز بنویسید که از نقاط  $(0, 20)$  و  $(1, 15)$  می‌گذرد. (چرا؟)]

ج) اگر  $h$  منفی باشد، آن دقت ما در عمق زمین هستیم، در حالی‌که در صورت مسأله رابطه‌ی بین ارتفاع و دما داده شده است (نه رابطه‌ی عمق

زمین و دما).

با توجه به این نکته که  $h$  منفی نیست، معلوم می‌شود این نمودار در ربع‌های ..... است.

حداکثر مقدار برد هم که معلوم است! **توجه:** این تابع کاهشی است.]

د)  $h = 4 - \frac{T}{5}$

۷۴ - ب)  $x = \sqrt[3]{V}$  (جواب را تنها به این دلیل لو دادیم که در فصل بعد باز هم به سراغ توابع رادیکالی خواهیم رفت، البته مفصل‌تر!)



$$75- \Delta P = 2\pi x \quad (\text{الف}) \quad \Delta S = \pi x^2 + 4\pi x \quad (\text{ب})$$

یک تابع خطی و یک تابع درجه دوم

76- الف) **راهنمایی:** جمله‌ی «در تابع  $f$  به ازای هر یک واحد افزایش  $x$ ، مقدار تابع ۲۵ واحد کاهش می‌یابد» به این معنی است که تابع  $f$  تابع خطی با

شیب ۲۵- است. از طرفی با توجه به  $f(0) = 10$  عرض از مبدأ خط برابر با ۱۰ است.

ب) **راهنمایی:** در محل تلاقی با محور طول‌ها،  $y$  برابر صفر است. یعنی باید معادله‌ی  $f(x) = 0$  حل شود.

ج) ۴۰- و ۱۲/۵

### مقدار تابع در یک نقطه

77- الف) دو جواب وجود دارد زیرا  $g(-1) = 0$  یا  $g(-1) = 1$ .

ب) سه جواب وجود دارد.  $f(-1) = -1$  امکان‌پذیر نیست. اگر  $f(-1) = 0$  باشد، قطعاً  $f(0) = -1$  خواهد بود و اگر  $f(-1) = 1$  باشد،  $f(0) = 0$  یا  $-1$  خواهد بود.

**توصیه:** برای هر دو قسمت حتماً نمودار ون رسم کنید.

79- الف) ۲ و ۰ ب) ۲، ۴ و ۵

۸۰- د) ۰، -۱ و ۱

۸۱- **راهنمایی:** رابطه‌ی  $f$  به صورت زوج مرتب:  $f = \{(1,2), (2,1), (3,3)\}$

د) ۱، ۲ و ۳

۸۲- د) ۰، -۱، ۲ و ۱

۸۳- الف) ۰، -۲،  $\frac{1}{3}$  و ۱ و ۵

۸۴- ب) ۲-

۸۵-  $\frac{11}{3}$  و  $-\frac{1}{3}$

۸۶- الف) **راهنمایی:** معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$  می‌گذرد.

ب) **راهنمایی:** برد برابر با  $[-3, 3]$  است.

۸۷- الف)  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{2}$

ب) این تابع، یک‌به‌یک نیست.

ج) این رابطه، تابع نیست.

د)  $\frac{4}{3}$  **راهنمایی:** ابتدا معادله‌ی خط گذرا از نقاط  $(0,0)$  و  $(2,-6)$  را بنویسید.

۸۸- **راهنمایی:** در هر زوج مرتب مسأله‌ی قبل، مؤلفه‌های اول و دوم را جابه‌جا کرده و سپس معادله‌ی خط جدید را بنویسید. به این ترتیب،

جواب‌های  $y = 5x - 7$ ،  $y = -3x$ ،  $y = 1$  و  $x = 4$  به دست می‌آیند که دو تای آنها تابع یک‌به‌یک هستند.

۸۹- الف) **راهنمایی:** در محل تقاطع با محور طول‌ها،  $y = 0$  است و در محل تلاقی با محور عرض‌ها،  $x = 0$  می‌باشد. بنابراین تابع  $f$  باید از نقاط  $(-2,0)$

و  $(0,1)$  بگذرد.

ب)  $f(4) = 3$

ج) **یادآوری:** شرط عمود بودن دو خط آن است که شیب‌های آنها معکوس و قرینه‌ی یکدیگر باشند.

د) ۴ و ۰

۹۰- ب) ۲ و ۲/۵ و ۰/۵

مسائل ترکیبی

۱-  $(x = 7, y = -3)$  یا  $(x = -7, y = 3)$

**راهنمایی:** می دانیم  $\begin{cases} x^2 + xy = 28 \\ y^2 + xy = -12 \end{cases}$  حال یکبار دو معادله را با هم جمع کنید و بار دیگر دو معادله را از هم کم کنید. [امیدوارم اتحادهای مربع دوجمله‌ای و مزدوج را فراموش نکرده باشید.]

۲-  $(a, b) = (-1, 2)$

۳- الف)  $f$  تابع است و  $g$  تابع نیست. چرای آن را شما بگویید.

۴- اشتراک دو تابع قطعاً تابع است ولی در مورد اجتماعشان نمی توان حکم قطعی داد. (یعنی اجتماع دو تابع می تواند تابع باشد یا نباشد).  
اجتماع دو رابطه‌ی غیرتابع قطعاً تابع نیست (غیرتابع است) ولی در مورد اشتراکشان نمی توان حکم قطعی داد. (یعنی اشتراک دو رابطه‌ی غیرتابع می تواند تابع باشد یا نباشد).

۵- الف) خیر. ب) بله، بله. دامنه  $=$  برد  $= A$

۶- رابطه‌ی  $f$  تابع یکبه‌یک با ۳ زوج مرتب است و رابطه‌ی  $g$  با ۲ زوج مرتب، تابع نیست.

۷- رابطه‌ی  $g$  تابع یکبه‌یک است، اما رابطه‌ی  $f$  تابع نیست زیرا هر مؤلفه‌ی اول در  $f$  دارای دو مؤلفه‌ی دوم است (یعنی خودش و ۱).

۸- فقط «الف» همواره صحیح است. یکبه‌یک بودن یا نبودن آن به  $a \neq 0$  و  $a = 0$  بستگی دارد.

۹- الف)  $f(n) = 2n - 1$  با شرط  $n \in \mathbb{N}$  [به عبارت دیگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $D_f = \mathbb{N}$ ]

ب)  $y = f^{-1}(n) = \frac{n+1}{2}$  با شرط عدد طبیعی فرد بودن  $n$  [یا به عبارت دیگر  $y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$  با دامنه‌ی اعداد طبیعی فرد]

۱۰- **راهنمایی:** خود تابع  $f$  باید از نقطه‌ی  $(3, -1)$  بگذرد یعنی باید  $f(3) = -1$

۱۱- الف)  $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  ب)  $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  ج) این دو رابطه، وارون یکدیگرند.

۱۲- الف)  $(0, c)$  و  $(c, 0)$  [در نهایت نتیجه می گیریم تابع وارون تابع  $x + y = c$ ، خودش است.]

ب)  $(0, b)$  و  $(-\frac{b}{a}, 0)$  و  $(b, 0)$  و  $(0, -\frac{b}{a})$   $f^{-1}(x) = y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

ج) نتیجه می گیریم با عوض کردن جای  $x$  و  $y$  در ضابطه‌ی یک رابطه، می توان ضابطه‌ی وارون آن رابطه را به دست آورد.

۱۳- ب)  $f^{-1}$  ج) **راهنمایی:** جای  $x$  و  $y$  را عوض کنید. د)  $y = \frac{1-x}{2}$

۱۴- «ب» و «ج» نادرست هستند. [در قسمت «ب» کافی است دامنه بیش از یک عضو داشته باشد و در قسمت «ج» کافی است برد بیش از یک عضو داشته باشد. (نمودار آن‌ها را رسم کنید).]

۱۵- در تمام بازه‌ها تعداد اعداد حقیقی، گنگ و گویا بی شمار است. اما تعداد اعداد صحیح، محدود (متناهی) است.

۱۶- ب)  $2$  و  $-1$ ؛ خیر ج)  $(0, 1)$ ،  $(-\frac{1}{2}, 0)$  و  $(\sqrt{2}, 0)$  **راهنمایی:**  $f(0)$  را باید از ضابطه‌ی پایینی یعنی  $f(x) = 2x + 1$  به دست آورد. ضمناً

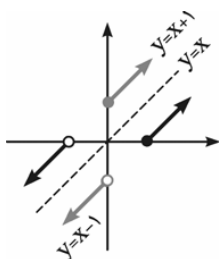
برای پیدا کردن محل تلاقی با محور طول‌ها باید معادله‌ی  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  را حل کرد و جواب بزرگ‌تر از ۱ را پذیرفت و هم‌چنین باید معادله‌ی  $f(x) = 2x + 1 = 0$  را حل کرد و جواب کوچک‌تر از ۱ را پذیرفت.

۱۷-  $-9$  و  $-3$  و  $0$

۱۸-  $1$  و  $4$  و  $-1$  و  $-2$

۱۹- الف) بله، یکبه‌یک است. (چرا؟)

ب)  $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1; & x \geq 1 \\ x+1; & x < -1 \end{cases}$  و  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - [-1, 1) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$



### تمرینات ویژه دانش آموزان سخت‌کوش

۱- الف) نشان دهید  $a_n - a_{n-1} = a$

ج) خیر -  $a_1 = a + b$  (جمله‌ی اول = شیب + عرض از مبدأ)

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

۲- الف)  $D_f = \{a_n\}$  و  $R_f = \{b_n\}$

ب)  $f(x) = -2x + 7$  [اهتمای: باید معادله‌ی خط گذرا از نقاط  $\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  و ... را بنویسیم].

$$g(x) = f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

۳- الف) [اهتمای: در ضابطه‌ی تابع به جای  $x$  هریک از ۴ عدد داده شده را قرار داده و مقدار تابع را به دست آورید. (که اگر این مقدار، عددی طبیعی بود، جواب است.)

ب)  $x = -\frac{1}{6}$  بزرگ‌ترین عضو دامنه است. [اهتمای:  $y \geq 1$  یا به عبارت دیگر  $-\frac{1}{4} \geq -3x + \frac{1}{4}$  را حل کنید].

ج) زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی منفی [اهتمای: اعضای دامنه را به ازای چند  $y$  طبیعی مانند  $y=1, y=2, y=3$  و ... به دست آورید].

۴- الف)  $R_f = D_g = \{-2, 0, 2\}$

ب)  $f$  و  $g$  وارون یکدیگرند  $\Rightarrow \{1, 2, 3\} =$  ورودی ماشین = خروجی ماشین

ج) ماشین تابع  $f(x) = x$

۵- تمام قسمت‌ها ۵ به دست می‌آیند.

پرسش: اگر  $f$  تابعی غیرخطی بود، آیا باز هم حاصل تمام قسمت‌ها برابر می‌بود؟

پاسخ: خیر. فقط برای رابطه‌ی خطی چنین اتفاقی می‌افتد.

۶- الف) اعداد حسابی

ب)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$  [اهتمای: در قسمت‌های «الف» و «ب» می‌توانید به ازای ۳ یا ۴ عضو مختلف دامنه، مقادیر تابع را به دست آورید].

ج) برد این تابع، برابر با اجتماع قسمت‌های «الف» و «ب» است، یعنی  $\mathbb{Z}$ .

دو ضابطه دارای اشتراک  $\{0\}$  هستند، بنابراین به ازای دو  $n$  متمایز (یکی زوج و دیگری فرد)، مقدار تابع برابر با صفر می‌شود. [این دو  $n$  را مشخص کنید].

۷- ۳، -۳، -۲ و ۴. برای حل این مسئله باید ابتدا ضابطه‌ی تابع  $f$  را در هر قسمت از آن تعیین کنید. برای  $x \leq 0$  واضح است که  $f(x) = -3$ ، اما

برای  $0 \leq x \leq 1$  تابع  $f$  خطی است و از نقاط  $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌گذرد و برای  $x \geq 1$  تابع  $f$  خطی است و از نقاط  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$  می‌گذرد. پس ضابطه‌ی

تابع  $f$  به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & ; x \leq 0 \\ 3x - 3 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$