

جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۱

مفهوم دنباله

۱- (ب) ۳۸ و ۲۴

 ۲- (د) $a_n = 10^{n-1}$

۳- الف) راهنمایی: ابتدا یک مربع گوشه‌ی هر شکل را در نظر بگیرید.

ب) راهنمایی: ابتدا دو مربع دو گوشه‌ی هر شکل را در نظر بگیرید.

 ۴- ب، ج، د) $(\frac{13}{8}, 29, 10, 4, 5)$ [راهنمایی: این دنباله را به صورت $\frac{20-n^2}{n}$ بنویسید. حال از آن جا که n عددی طبیعی است پس مخرج این کسر

 مثبت است و کافی است $20-n^2$ مثبت باشد.]

 ۵- الف، ب) ۴ و ۷ / ج) $1, 1, 2, \dots$

 ۶- توجه: در هر قسمت a_n و b_n را مقایسه کنید.

 راهنمایی: در قسمت‌های «ب» و «ج» بهتر است دنباله‌ی بازگشتی را به صورت $b_n = n \cdot b_{n-1}$ و $b_n = n + b_{n-1}$ بنویسید.

 ۷- حدس‌هایتان در قسمت «الف» را با پاسخ قسمت «ب» مقایسه کنید. (در قسمت «ب» داریم $a_4 = 14, b_4 = 7, c_4 = 12$)

 ۸- راهنمایی: الف) جمله‌ی اول را $\frac{1}{1}$ در نظر بگیرید.

 ب) ابتدا فرض کنید علامت منفی وجود ندارد و در آخر $(-1)^n$ را در جمله‌ی عمومی به دست آمده، ضرب کنید.

 ج) جمله‌ی اول را $\frac{1}{1}$ در نظر بگیرید.

 ه) ابتدا فرض کنید علامت منفی وجود ندارد و در آخر $(-1)^{n+1}$ یا $(-1)^{n-1}$ را در جمله‌ی عمومی به دست آمده، ضرب کنید. هم‌چنین توجه کنید که

مخرج هر کسر از حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی به دست آمده است:

$$2 = 1 \times 2 \text{ و } 6 = 2 \times 3 \text{ و } 12 = 3 \times 4 \text{ و } \dots$$

 و) جمله‌ی اول را $\frac{1}{1}$ در نظر بگیرید و سپس برای صورت‌های کسرها یک الگو و برای مخرج‌های کسرها نیز یک الگوی دیگر بیابید.

 ۹- الف) ابتدای دی $\leftarrow 170$ مرغ / ب) $a_1 = 100, a_{n+1} = 2a_n - 90$

 ۱۰- ج) $a_{12} / \text{د) } b_{44} = 44 \Rightarrow \{b_n\} = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

 دنباله‌ی اعداد طبیعی $\Rightarrow b_n = a_n - a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \dots$

 ۱۱- ب) $c_n = a_n + a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \dots$ / ه) c_9

۱۲- با احتساب دنباله‌ی مثلثی: ۲ کاهش، ۲ افزایش و ۱ ثابت.

دنباله‌ی حسابی و مفهوم آن

 ۱۳- ب) $2n - 1$ یا $2n + 1$ ؟ کدام؟

 قدرنسبت‌ها عبارت‌اند از: ۰، ۱، ۲ و $-\frac{1}{2}$

 ۱۴- ب) $a_n = -3n + 74$ / ج) ۲۴ و بی‌شمار

۱۵- باید بررسی کنید در کدام دنباله‌ها $a_n - a_{n-1}$ (یا $a_{n+1} - a_n$) عددی ثابت است. (در سه دنباله این عدد ثابت است و برابر با ۱، ۰ یا $-\frac{4}{5}$ می‌باشد.)
توجه کنید که در دنباله‌ی حسابی داریم:

ثابت $\Leftrightarrow d = 0$ ، کاهشی $\Leftrightarrow d < 0$ ، افزایشی $\Leftrightarrow d > 0$

۱۶- الف) $(n - m)$ برابر / ب) ۳

۱۷- الف) نشان دهید اگر $m + n = p + q = k$ ، آن‌گاه $a_m + a_n$ و $a_p + a_q$ برابر با $2a_1 + (k - 2)d$ می‌باشند.

ب) در قسمت «الف» فرض کنید $p = q = \frac{m+n}{2}$. (فکر می‌کنید چرا تأکید شده $m + n$ زوج باشد؟)

$$\text{ج) } \frac{n+m}{2} \text{ و } \frac{n-m}{2}$$

کاربرد دنباله‌ی حسابی در حل مسائل

۱۸- الف) $a_n = 125 + 3n$ (برحسب هزار تومان)

ب) $b_n = 20 - 4n$

د) $a_n = 12 \times 10^6 - 48000n$ (برحسب لیتر) یا $a_n = 12000 - 48n$ (برحسب هزار لیتر)

۱۹- الف) همان دنباله‌ی اعداد طبیعی فرد است.

ب) $a_n = 9n - 5$ و $b_n = 3n - 10$

۲۰- الف) $a_n = -35n + 5235$. عدد «۳۵» نشان‌دهنده‌ی کاهش قیمت پشت جلد کتاب‌های خریداری شده در ازای خرید هر جلد کتاب است.

ب) 66430 و 90700 / ج) $b_n = -35n^2 + 5235n$

مسائل محاسباتی دنباله‌ی حسابی

۲۱- جملات هشتم: $1 - \frac{5}{5}, \frac{33}{5}$

۲۲- قدرنسبت‌ها در دنباله‌های حسابی $\frac{1}{5}$ و $1 - \sqrt{2}$ هستند.

۲۳- ۱۵ و ۸ و ۳۳-

۲۴- ۲۷ و ۱۵ (جمله‌ی عمومی را خودتان بیابید.)

۲۵- ۵، ۴۶ و ۱۵۷

۲۶- الف) $3, -30$ / ب) $t_n = 4n - 5$

۲۷- $\frac{5}{5}, -\frac{5}{5}, -3$

۲۸- $7, 5, 10, -1$

واسطه‌ی حسابی

۲۹- $9, -16, -29$

۳۰- قدرنسبت‌ها $= \frac{3}{5}$ (یا $-\frac{3}{5}$) و ۶ (یا -6)

۳۱- الف) توجه کنید که مجموع زوایا 180° است و در نتیجه زاویه‌ی متوسط 60° درجه است. (در نهایت قدرنسبت 20° می‌شود.) / ب) 10

۳۲- باید $d = 0$ (به عبارت دیگر $a = b = c$)

عملیات جبری روی دنباله‌های حسابی

۳۳- قدرنسبت $d + d'$

۲۴-۲۵

۳۵- ج) قدرنسبت همان d است.

توجه: در قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» به ترتیب $b_n = -a_n$ ، $b_n = ka_n$ و $b_n = a_n + m$ می‌باشند. حال کافی است از راهنمایی نوشته شده در آخر مسأله استفاده شود.

۳۶- هیچ‌یک از دنباله‌های a_n و b_n دنباله‌ی حسابی نیستند ولی c_n یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت و جمله‌ی اول -1 می‌باشد. نتیجه می‌گیریم مجموع دو دنباله‌ی غیرحسابی می‌تواند دنباله‌ی حسابی باشد.

دنباله‌ی هندسی و مفهوم آن

۳۷- دو دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت‌های 1 و -1 ۳۸- $q < 0$ (د)

۳۹- باید نسبت هر جمله به جمله‌ی قبلی عددی ثابت باشد.

در این مسأله یک دنباله‌ی هندسی کاهشی و یک دنباله‌ی هندسی افزایشی وجود دارد. یک دنباله‌ی هندسی نیز نه افزایشی و نه کاهشی است.

$$40\text{- الف) } q > 1 \text{ و } a_1 < 0 \text{ ب) } a_n = -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

۴۱- ب) نشان دهید اگر $m + n = p + k = r$ ، آن‌گاه $a_m \cdot a_n$ و $a_p \cdot a_k$ برابر با a_r^2 می‌باشند.

ج) در قسمت «ب» فرض کنید $p = k = \frac{m+n}{2}$. (چرا باید $m+n$ زوج باشد؟)

کاربرد دنباله‌ی هندسی در حل مسائل

$$42\text{- الف) } 50 \times 2^{n-1} \text{ یا } 25 \times 2^n \text{ ب) } 10 \times (0.9)^{n-1} \text{ د) } 40\pi \times (0.85)^{n-1}$$

$$43\text{- ب، ج) } a_n = 3a\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ و } b_n = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$44\text{- ب، ج) } a_n = \frac{fa}{(\sqrt{2})^{n-1}} \text{ و } b_n = \frac{a^2}{4^{n-1}}$$

۴۵- راهنمایی: اضلاع مثلث قائم‌الزاویه به صورت aq^2, aq, a هستند که طول وتر aq^2 می‌باشد. حال اگر از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده کنید، به معادله‌ی $q^4 - q^2 - 1 = 0$ می‌رسید که این معادله با تغییر متغیر $q^2 = x$ به راحتی حل می‌شود.

مسائل محاسباتی دنباله‌ی هندسی

$$46\text{- قدرنسبت‌ها } = -1, 4, \sqrt{7}, \frac{4}{5}$$

$$47\text{- قدرنسبت‌ها } = 1/5, 1/1, \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (به عنوان مثال دنباله‌ی «ب» می‌تواند دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت } 1/1 \text{ باشد.)}$$

۴۸- 5 و 9 و 81

$$49\text{- } b_n = 4(-3)^{n-1} \text{ و } a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})^{n-1}$$

$$50\text{- } 1, 81, a^{2-n} = q^{n-2}$$

۵۱- $1, -32, 0/4, \pm 1$ ۵۲- $2, 4, \pm 8$

واسطه هندسی

۵۳- الف) $q = 3 \Rightarrow m = 5$ و $q = 1 \Rightarrow m = -3$ / ب) $x = 3$

۵۴- راهنمایی: داریم $9^z \times 3^x = (81^y)^2$

 ۵۵- راهنمایی: به جای b^2 باید ac را جایگزین کنید.

۵۶- 3 و ± 1

۵۷- $1 - \pi^2$ ، $\pm 6^0$ و $(1 + \pi)(1 - \pi) = (1 - \pi)(1 + \pi)$

(یک قسمت ۲ جواب دارد و یک قسمت هیچ جوابی نمی تواند داشته باشد.)

۵۸- الف، ب) ± 1 ، $\pm 18\sqrt{3}$ / ج) $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{2}$ $q =$

۵۹- $d = 0$ و $q = 1$ (دنباله‌ی ثابت)

انجام عملیات روی دنباله‌ی هندسی

۶۰- $c_1 = a_1 b_1$ ، $q_3 = q_1 q_2$

 ۶۱- راهنمایی: در قسمت‌های «الف» تا «د»، به ترتیب $b_n = ka_n$ ، $b_n = (a_n)^p$ ، $b_n = \sqrt[p]{a_n}$ و $b_n = \frac{1}{a_n}$ است. حال کافی است راهنمایی آخر

مسأله را روی هر یک از این دنباله‌های جدید اعمال کنید.

 ۶۲- هیچ‌یک از دنباله‌های a_n و b_n دنباله‌ی هندسی نیستند ولی c_n یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول و قدرنسبت ۲ می‌باشد. نتیجه می‌گیریم حاصل ضرب دو دنباله‌ی غیرهندسی می‌تواند دنباله‌ای هندسی باشد.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

 ۶۴- الف) پنج جمله ($x_5 = 4/73409$)، خیر / ب) سه جمله ($x_3 = 7/820$) / ج) دو جمله ($x_2 = 2/81$) / د) چهار جمله ($x_4 = 8/3000$)

۶۵- در جاهای خالی اولین گزاره باید «ب» و «د» قرار بگیرد. (پر کردن آخرین جای خالی برعهده‌ی خودتان.)

۶۶- 3×10^{-6} ، 6×10^{-6} ، 63×10^{-6} و 36×10^{-7}

۶۷- دو دنباله‌ی هندسی و دو دنباله‌ی تقریبات اعشاری

نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد

۶۹- الف، ب) در هر قسمت یک دنباله به صفر نزدیک می‌شود و دیگری به هیچ عددی نزدیک نمی‌شود.

 ۷۰- ج) نشان دهید جملات $\{c_n - (-1)\}$ یا $\{c_n + 1\}$ به صفر نزدیک می‌شود.

۷۲- جملات یک دنباله به عدد ۲ و جملات دو دنباله به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

 ۷۴- الف) دنباله‌ی تفاضل یعنی $b_n = a_n - k$ ، در این جا دنباله‌ی ثابت $\{0\}$ است و در نتیجه جملات آن به صفر نزدیک می‌شوند.

 ب) با نوشتن چند جمله از دنباله‌ی تفاضل یعنی $b_n = \frac{y}{e} - a_n$ ، معلوم می‌شود $b_n = \frac{2}{3} \times 10^{-n}$ ، است که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت می‌باشد.

ریشه‌گیری اعداد حقیقی

۷۵- $x = \sqrt{3}$ و $y = \sqrt[3]{2}$

 ۷۶- توجه: $\pm \sqrt[4]{1} =$ ریشه‌های چهارم ۱

۷۷- الف، ج، و

۷۸- الف) راهنمایی: ضرب مفروضات مسأله و سپس ریشه‌ی پنجم گرفتن از آن (جواب = -۳)

$$\text{ب) راهنمایی: } a = \frac{a^3 b^2}{(ab)^2} = b \text{ و } \frac{a^2 b^3}{(ab)^2} = a \text{ (جواب: } 1/5, -2)$$

$$۷۹- ۵, -۲, -۴, ۴, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{a^2}{2}, \pm \frac{a^4}{9} \text{ و } \sqrt[3]{-a^2}$$

$$۸۰- ۲۷, \frac{27}{25}, ۳, -۲, -۲۰۰, ۲a, \frac{-2}{a}, \frac{a}{2}, ۳a\sqrt{2a}$$

$$۸۱- \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}, -۲\sqrt[3]{25}, -۴\sqrt{32}, \sqrt{18}$$

$$۸۲- ۲\sqrt[3]{2} \text{ (ج)}$$

$$۸۳- ۲, -\sqrt{2}, -۱, ۰, \sqrt[3]{3}, ۲\sqrt[3]{2}, ۲\sqrt{x}$$

۸۴- الف) در مورد علامت c چیزی نمی‌توان گفت

ب) علامت b مخالف علامت a و c (a و c هم‌علامت)

۸۵- همان‌طور که می‌بینید وقتی اعداد منفی بخواهند از زیر رادیکال خارج شوند یا به زیر رادیکال بروند یا توانشان تغییر کند، باید مراقب بود تا اشتباهی رخ ندهد.

$$۸۶- و، ز، ح) \sqrt[3]{\frac{-4}{9}}, \sqrt[3]{81}, \sqrt{-a^{17}}$$

$$۸۷- \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-8} \text{ و } \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-8}$$

$$۸۸- -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3072}, \sqrt[3]{405}$$

۸۹- راهنمایی: در قسمت «د» طرفین را به توان ۴ برسانید و اعداد حاصل را مقایسه کنید. [به عبارت دیگر $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$]

$$۹۰- \sqrt[3]{2^{11}}, \sqrt[3]{2^7}, \sqrt[3]{2^4}, ۴, ۵, ۰/۵$$

$$۹۱- a = \sqrt[3]{2}$$

توان‌رسانی به توان اعداد گویا

$$۹۲- ۳ \text{ و } ۸\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$۹۳- \frac{1}{5^4}, ۶۳, ۳^{12}, ۳^{40}, ۳\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[5]{0/05}, \frac{1}{\sqrt[5]{30}}, ۴\sqrt[3]{32}$$

$$۹۴- \frac{1}{7}, ۳, ۷^{-1} = \frac{1}{7}, ۲/۷, ۰/۵, ۰/۰۴, ۲, ۳^{0/5}, ۳^{-1/5}, ۲^{1/5} \text{ و صفر}$$

۹۵- الف) ۳

توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی

$$۹۶- ۱, ۳\sqrt[3]{3}, ۹, ۵, ۰/۵, ۶۴ \text{ و } ۳۶$$



$$۹۷- \text{الف) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ و } ۲^{-۲} > ۲^0 > ۲^1 > ۲^۳ /$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{3}\right)^4 > ۳^۴ > ۳^{-۵} < ۱^{-۵} < ۳^{-۵} < ۵^{-۵}$$

$$۹۸- \text{ز، ح، ط) راهنمایی: } ۲^۳ = ۸, \sqrt{۲} = ۲^{\frac{1}{2}} \text{ و } ۵^{۲\sqrt{۵}} = ۲۵^{\sqrt{۵}}. \text{ [در حل این تمرین، از تمرین قبل (۹۷) کمک بگیرید.]}$$

حل معادلات رادیکالی و توانی

$$۹۹- \sqrt[۴]{۲}, \pm\sqrt{۶۵}, \frac{1}{۳}, ۰/۴, ۴, ۰/۴, \sqrt[۴]{۲} \text{ و } \sqrt[۴]{۲}$$

مسائل ترکیبی

$$n.c_n = 24 \Rightarrow c_n = \frac{24}{n} \text{ و } b_n + 1 = 2^n \Rightarrow b_n = 2^n - 1 \text{ و } \frac{a_n}{2} = n^2 \Rightarrow a_n = 2n^2 - 1$$

$$2 - \text{الف) } 9 \text{ و } (2n - 1) \text{ / ب) بازگشتی: } a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \text{ و غیربازگشتی: } a_n = n^2 \text{ / ج) } n^2$$

$$3 - \text{الف) } a_1 = 41 \text{ سیزدهمین عدد اول است.}$$

$$\text{ب) } a_8 = 97 \text{ [راهنمایی: معادلات } a_n = 97 \text{ و } a_n = 59 \text{ را حل کنید تا معلوم شود کدام معادله دارای جواب طبیعی است.]}$$

$$4 - \text{الف) } 3n - 1 = 8 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_8 = \frac{19}{26}$$

$$\text{ب) } 1, 1, 1, 2, 4, 9, \dots$$

$$\text{ج) } [F_7 = F_7 + F_1 \text{ و } F_7 = F_7 + F_7 \text{ [راهنمایی: } F_1 = -1 \text{ و } F_7 = 2]]$$

$$5 - \text{هدف جمله [راهنمایی: نشان دهید } d > 0 \text{ و } b_{18} = 0 \text{ و سپس با توجه به } d > 0 \text{ در مورد علامت جملات قبل و بعد از } b_{18} \text{ بحث کنید.]}$$

$$6 - \text{الف) راهنمایی: } d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

$$\text{ب) راهنمایی: پاسخ قسمت الف } (d = -1) \text{ را در } t_m = t_1 + (m - 1)d = n \text{ یا } t_n = t_1 + (n - 1)d = m \text{ جایگذاری کنید.}$$

$$\text{ج) راهنمایی: پاسخ قسمت های الف و ب } (d = -1 \text{ و } m + n = t_1 + 1) \text{ را در } t_{m+n} = t_1 + (m + n - 1)d \text{ جایگذاری کنید.}$$

$$7 - \text{الف) } 11 \text{ و } 8 \text{ و } 5 \text{ / ب) } 9 \text{ و } 6 \text{ و } 3 \text{ [راهنمایی: در هر دو قسمت سه عدد را } b - d, b, b + d \text{ در نظر بگیرید.]}$$

$$8 - d = 2 \text{ [راهنمایی: } a_1 + a_7 = 2a_4]$$

$$9 - \text{الف) راهنمایی: با فرض } x + z = 2y \text{ باید نشان دهید } (y^2 + yz + z^2) + (x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xz + z^2)$$

$$\text{ب) راهنمایی: با فرض } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c} \text{ باید نشان دهید } a^2 + c^2 = 2b^2$$

$$\text{ج) راهنمایی: } 2 - 2x - 2y \text{ واسطه‌ی حسابی } 2x + 2y \text{ و } 2 + 5y \text{ است. هم‌چنین } 2 + 5y \text{ واسطه‌ی حسابی } 2 - 2x \text{ و } 4y - x \text{ است. به این ترتیب یک}$$

$$\text{دستگاه دو معادله دو مجهول حاصل می‌شود که از حل آن } x = y = -\frac{3}{4} \text{ به دست می‌آید.}$$

$$10 - \text{راهنمایی: } a.h_a = b.h_b = c.h_c = 2S_{ABC}$$

$$\text{[باید نشان دهید اگر } a.c = b^2 \text{، آن‌گاه } h_a.h_c = (h_b)^2]$$

$$11 - 59 \text{ دقیقه [برای درک بهتر مسأله، چند جمله‌ی اولیه‌ی هر دو دنباله‌ی } a_n \text{ و } b_n \text{ را بنویسید تا ببینید که } a_n = b_{n-1} \text{ یا } b_n = a_{n+1}]$$

$$12 - \text{الف) } -\frac{1}{24} \text{ [راهنمایی: } a_5 - a_7 = a_7 q^2 - a_7 = a_7 (q^2 - 1)]$$

$$\text{ب) } a_1 = 2, q = \pm 3$$

$$13 - \text{الف) } (-0.25)^n = 64\sqrt{3} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} = -16\sqrt{3} \Rightarrow t_n = -16\sqrt{3} \text{ [توجه: } q = -\frac{1}{4} < 0 \text{ و } t_n = t_1 q > 0 \text{ است، بنابراین } t_1 = +16\sqrt{3} \text{ غیرقابل قبول می‌باشد.]}$$

$$\text{ب) } b_{10} = 64 \text{ [راهنمایی: } b_{10} = b_7 \cdot b_4 = b_7 \cdot b_1 \Rightarrow 3 + 9 = 2 + 10]$$

$$14 - \text{الف) راهنمایی: } a = b - d \text{ و } c = b + d \text{ است. حال با جایگذاری این تساوی‌ها در رابطه‌ی } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \text{ به جواب مسأله خواهیم رسید.}$$

$$\text{[جواب: } d = 0 \text{ باید باشد، یعنی دنباله‌ی ثابت.]}$$

ب) راهنمایی: می‌دانیم $b^2 = ac$ است. حال باید $(a+k)(c+k) = (b+k)^2$ را ساده کنیم. با این کار به $a+c = 2b$ می‌رسیم، یعنی این دنباله‌ی هندسی باید دنباله‌ی حسابی هم باشد که طبق مسأله‌ی ۵۹ صفحه‌ی ۲۲ معلوم می‌شود که دنباله‌ی مذکور باید دنباله‌ی ثابت باشد.

ج) راهنمایی: باید با فرض $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-a} = \frac{2}{2b}$ نشان دهیم $b^2 = ac$.

۱۵- در هر دو حالت، قدرنسبت همان q است. [راهنمایی: در قسمت «الف»، $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ و در قسمت «ب»، $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n + a_{n-1}}$ را بیابید.]

۱۶- $-\frac{3}{2}$ و $\sqrt{3}$

۱۷- الف) ۱ / ب، ج) به صفر نزدیک می‌شود $\rightarrow \{x - x_n\} = 10^{-n}$

۱۸- الف) $\sqrt[4]{-x}$ معنی دارد. ضمناً $17 - \sqrt{288} = (\sqrt{2} - 1)^4$

ب) ابتدا نشان دهید $a = 2^3$.

۱۹- الف) $6\sqrt{3}, -4\sqrt{9}$ / ب) $\pm 2\sqrt[3]{4}, \pm 2\sqrt[3]{2}, \pm 2, \sqrt[3]{4}, \pm \sqrt[3]{2}$ / ج) $\pm 2\sqrt[4]{8}, \pm 2\sqrt[4]{2}$

د) $\pm \sqrt[4]{4}$ / ه) $2, 2\sqrt{2}$ / و) $\pm \sqrt[6]{3^7}, \pm \sqrt[6]{27}, \pm \sqrt[6]{3^5}$

۲۰- الف) $m = 10, n = 9$ $\Rightarrow 2^{12} = 2^{\frac{9m}{2}} = 2^{\frac{10n}{2}}$ / ب) $xy = -\frac{1}{3}$

تمرینات ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش

۱- الف) حسابی، 18° و $18^\circ(n-2)$

ب) 18° [راهنمایی: زوایا را $a+2d, a+d, a, a-d, a-2d$ در نظر بگیرید].

$$b_n = \frac{(n-2)18^\circ}{n} \quad \text{ج)}$$

۲- الف) $u_{n+1} = 3u_n + 8$

$$a_r = 3a_1 - 1 \xrightarrow{a_r = a_1} a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ب)}$$

۳- الف) $b_4 - a_4 = 9, b_3 - a_3 = 6, b_2 - a_2 = 3, b_1 - a_1 = 0$

ب) $b_n - a_n = 3(n-1)$ [توجه: $b_n = a_1 + (n-1)(d+3)$ و $a_n = a_1 + (n-1)d$]

۴- دو جواب: $2, 5, 8, 11$ یا $-2, -5, -8, -11$

۵- الف) 2 یا $-3 \Rightarrow q^2 + q = 6$

ب) $2 + \sqrt{3}$ یا $2 - \sqrt{3} \Rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 5q$

ج) $3, -6, -\frac{3}{2} \Rightarrow (q + \frac{1}{q} = -2/5 \Rightarrow q^2 + 2/5q + 1 = 0)$

د) $a_n = \frac{1}{3(2^{n-3})}$ یا $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}}$ (از حل معادله‌ی $\frac{1}{3q^2} + \frac{1}{3q} = 2$ یا $q^2 - q - 1 = 0, 6q^2 - q - 1 = 0$ به دست می‌آید و $a_1 = \frac{1}{3q^2}$ است.)

ه) $2, 6, 18, 54$ [راهنمایی: $\frac{1}{3}$ یا $q = 3 \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow \frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{a_1(1+q^2)}{a_1q(1+q)} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{a_1+a_4}{a_2+a_3} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$]

۶- الف) $a_n = 2^{n-1}$ [راهنمایی: $q^2 + 1 = \frac{a_5 - a_1}{a_3 - a_1}$]

ب) $b_n = 3^{n-2}$ [راهنمایی: $q^3 = \frac{a_4 + a_6}{a_1 + a_3}$]

۷- الف) $d_1 = 2d$ / ب) $d_2 = 2d$ / ج) $d_3 = 3d$ یا $d_3 = kd$ (این دنباله‌ها هم حسابی‌اند.) / د) دنباله‌ی حسابی نیست مگر آن‌که $d = 0$

(یعنی دنباله‌ی اولیه، ثابت باشد.)

۸- الف) $q_1 = q^2$ / ب) $q_2 = q^2$ / ج) $q_3 = q^3$ یا $q_3 = q^k$ / د) دنباله‌ی هندسی نیست مگر آن‌که $q = 1$ یا $q = 0$ (یعنی دنباله‌ی اولیه، ثابت باشد.)

۹- ب) باید نشان دهید $\frac{1}{a^3 + b^3} \times \frac{1}{c^3 + d^3} = \left(\frac{1}{b^3 + c^3}\right)^2$

۱۰- الف) $a_n = 3n - 1$ و $q = 2$ [راهنمایی: اگر جملات دنباله‌ی حسابی را $a+6, a+3, a, a-3, a-6$ در نظر بگیرید، باید $a+2, a+6, a+14$ دنباله‌ی

هندسی تشکیل دهند، یعنی باید $(a+6)^2 = (a+2)(a+14)$]

ب) $3, 6, 12$ [راهنمایی: می‌دانیم $a+b+c = 21$ و $a+(a+1)+c = 2(b+2)$ یا به عبارت دیگر $a+c = 2b+3$. از این معادلات نتیجه

می‌شود $b = 6$ و $a+c = 15$. از طرفی $ac = b^2 = 36$ است. از دو رابطه‌ی اخیر، a و c برابر با 3 و 12 به دست می‌آیند.]

ج) راهنمایی: می‌دانیم جملات $a + d, a + d + d, a + d + d + d$ از یک دنباله‌ی حسابی، تشکیل دنباله‌ی هندسی داده‌اند، یعنی $a(a + \gamma d) = (a + d)^2$. از رابطه‌ی اخیر، $d = 0$ یا $d = 5a$ به دست می‌آید. حال با توجه به $a + (a + d) + (a + \gamma d) = 86$ ، یک جواب مسأله $\frac{86}{3}$ و $\frac{86}{3}$ و جواب دیگر $2, 12, 72$ به دست می‌آید.

د) راهنمایی: می‌دانیم $a + b + c = 15$ و همچنین $b + c = 2a$. از این روابط $a = 5$ و $b + c = 10$ به دست می‌آیند. از طرفی $ac = b^2$ است یعنی $b^2 = 5c$. با جایگذاری $c = 10 - b$ در $b^2 = 5c$ ، یک معادله‌ی درجه ۲ به دست می‌آید که از حل آن $b = 5$ یا $b = -10$ می‌شود. اگر $b = 5$ باشد، $c = 5$ می‌شود اما قابل قبول نیست زیرا هر سه عدد ۵ شده‌اند و متمایز نیستند. ولی اگر $b = -10$ باشد، $c = 20$ به دست می‌آید که همین جواب قابل قبول است.

۱۱- $0/5, 0/55, 0/555, 0/5555, \dots$

جملات $\{b_n\}$ به صفر و جملات $\{a_n\}$ به $\frac{5}{9}$ نزدیک می‌شوند.

۱۲- الف) $0/1, 0/11, 0/111, 0/1111, \dots$

$$\frac{1}{90}, \frac{1}{900}, \frac{1}{9000}, \frac{1}{90000}, \dots \Rightarrow b_1 = \frac{1}{90}, q = 0/1$$

[توجه کنید که این مسأله بی‌شمار جواب دارد یعنی دنباله‌های دیگری نیز می‌توان ساخت که در شرایط این مسأله صدق کنند.]

۱۳- الف) خیر

$$\pi = 3/1415926... \Rightarrow \{a_n\} = 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \dots$$

$$\frac{5}{6} = 0/8\bar{3} \Rightarrow \{b_n\} = 8, 3, 3, 3, 3, \dots$$

$$\frac{5}{11} = 0/4\bar{5} \Rightarrow \{c_n\} = 4, 5, 4, 5, 4, \dots$$

ب) $\{b_n\}$ به ۳ نزدیک می‌شود.

$$14- \text{الف) ۱ / ب) } \frac{10}{11} \text{ ج) } \frac{5}{11} \text{ د) } \frac{47}{37} \text{ ه) } \frac{23}{15} \text{ و) } \frac{409}{110}$$

$$15- \text{الف) } A = B = 1 \text{ [توجه: } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}]$$

$$\text{ب) } C = \sqrt{3^{((x-1)^3)}} \Rightarrow C = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{ج) } x^4\sqrt{3} = 3^6\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 3^3 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$