جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۴

تفریق و قرینه‌ی اعداد ـ تقسیم و معکوس اعداد

۲- د) $a \times \frac{1}{a} = 1$ ؛ $a \neq 0 \Rightarrow a \times \frac{1}{a} = 1$ یا $a \times \frac{1}{a};\ a \neq 0$

ه) نامثبت $0 \leq a \times (-a)$

۳- ب) تفاضل b از a مساوی با مجموع a و قرینه‌ی b است. $4 - 1 = 4 + (-1)$

و) اگر در یک تقسیم (کسر)، مقسوم و مقسوم‌علیه را بر عدد غیرصفری تقسیم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

$$\frac{24}{4} = \frac{\frac{24}{2}}{\frac{4}{2}}$$

توجه: بهتر است در عبارات «ه» تا «ح» به غیر صفر بودن مخرج‌ها اشاره کنیم، مثلاً بگوییم «قرینه‌ی معکوس هر عدد غیرصفر، مساوی با معکوس قرینه‌ی آن عدد است.»

۴- پرسش: در تمرین ۴، شکل درست هریک از قسمت‌های «الف» تا «ج» را بنویسید.

۵- الف) **(راهنمایی:** $|-a| < |b|$ یعنی فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر با $-a$ تا مبدأ کمتر از فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر با b تا مبدأ است. پس نقطه‌ی نزدیک‌تر به مبدأ متعلق به $-a$ است.

ب) **(راهنمایی:** ابتدا روی محور اعداد، نقطه‌ی متناظر با a را بیابید. (توجه کنید که a قرینه‌ی $-a$ می‌باشد.) به این ترتیب علامت a معلوم می‌شود.
برای تعیین علامت $a + b$ به این نکته توجه کنید که مجموع دو عدد مثبت، عددی مثبت است و مجموع دو عدد منفی نیز عددی منفی است.
برای تعیین علامت $a - b$ باید به این موضوع توجه کنید که a در سمت راست b است (یعنی $a > b$) یا در سمت چپ b (یعنی $a < b$). واضح است که اگر $a > b$ باشد، آن‌گاه $a - b$ مثبت است و اگر $a < b$ باشد، آن‌گاه $a - b$ منفی است.

ج) **(راهنمایی:** می‌دانیم $a + b < a < 0$ (چرا؟)، بنابراین می‌توان دقیقاً معلوم کرد که هر کدام از a و $a + b$ برابر با کدام عضو مجموعه‌ی $\{-5, -2, 0, 2, 5\}$ می‌باشند. در آخر، جواب قسمت «ج» اعداد -3 و 1 خواهد بود.

۶- الف) **(راهنمایی:** مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض. عرض هر دو مستطیل (۱) و (۲) برابر با y است و طول‌ها هم معلوم‌اند.

ج) **(راهنمایی:** مساحت مستطیل اصلی (بزرگ‌ترین مستطیل) برابر با xy یا yx است. حال از راهنمایی صورت مسأله استفاده کنید.
به رابطه‌ای که به‌دست می‌آورید «خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) ضرب نسبت به تفریق» می‌گویند و شما در این مسأله اثبات هندسی آن را انجام دادید.

۷- راهنمایی: طبق صورت مسأله ab معکوس c است یعنی $ab = \frac{1}{c}$. طبق تعریف تقسیم (قسمت «و» تمرین ۲) می‌توان گفت $abc = 1$. از این رابطه می‌توان چند نتیجه گرفت، از جمله $b = \frac{1}{ac}$ یا $ac = \frac{1}{b}$. حال کافی است در عبارت $\frac{b+1}{ac+1}$ به جای b قرار دهید $\frac{1}{ac}$ (یا به‌جای ac قرار دهید $\frac{1}{b}$) و ...

۸- راهنمایی: در قسمت «ب» مخرج مشترک را xyz بگیرید. پاسخ‌های دو قسمت نیز اعداد ۱ و ۲ می‌باشند.

۹- ب) ۸ [**راهنمایی:** از پاسخ قسمت «الف» استفاده کنید و مفروضات قسمت «ب» را در آن جایگذاری کنید.]

❋ در این‌جا می‌توان تمرین «۱» از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۱۰- الف) **(راهنمایی:** طرفین فرض را در عدد غیرصفر bd ضرب کنید.

۱۱- راهنمایی: ابتدا مانند تمرین ۸، عبارت $3 + \frac{3}{x-1}$ را به‌صورت یک کسر بنویسید.

نتیجه‌ی نهایی: معکوس قرینه و قرینه‌ی معکوس هر عبارت غیر صفر، با یکدیگر برابرند.

عبارت‌های جبری

۱۲- الف) **راهنمایی:** مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع قائم به‌طول a و b و وتر به‌طول $2R$

ب) **راهنمایی:** مساحت قسمت سایه‌دار = مساحت دایره منهای مساحت مستطیل

ج) ۵ و $۲۵\pi - ۴۸$

۱۳- $-\frac{۱}{۴}$ ، ۱۲ و $\sqrt{۱۶۲} - \sqrt{۱۰۸} = ۹\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۳}$

یک جمله‌ای‌ها

۱۴- هشت عبارت یک‌جمله‌ای می‌باشند، از جمله قسمت‌های «ه» و «س».

چند نکته: ۱- گاهی ممکن است یک عبارت جبری در نگاه اول یک جمله‌ای به‌نظر نیاید اما پس از ساده کردن با عملیات ریاضی، معلوم شود که یک‌جمله‌ای است. مثلاً:

$$\frac{a^۲b}{\sqrt{۵}} - ba^۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}a^۲b - a^۲b = \left(\frac{۱}{\sqrt{۵}} - ۱\right)a^۲b \rightarrow \left(\frac{۱}{\sqrt{۵}} - ۱\right)$$ یک‌جمله‌ای با ضریب عددی

$$\sqrt[۳]{۵x^۳} = \sqrt[۳]{۵} \times \sqrt[۳]{x^۳} = \sqrt[۳]{۵}\,x \rightarrow \sqrt[۳]{۵}$$ یک‌جمله‌ای با ضریب عددی

۲- تمام اعداد حقیقی، عبارت جبری‌اند و تمام اعداد حقیقی غیرصفر، یک‌جمله‌ای هستند، مثلاً $\frac{۴\sqrt{۷} - ۳^{-۱}}{\pi^۲}$. در این‌جا نباید فریب توان منفی و رادیکال و تقسیم را خورد زیرا این عبارت در نهایت یک عدد حقیقی غیرصفر و در نتیجه یک‌جمله‌ای است. [در این تمرین، ۲ گزینه عددِ غیرصفرند. آن‌ها را بیابید.]

۳- حتی اگر صد عدد و متغیر (یا بیشتر) در هم ضرب شوند، باز هم عبارت حاصل یک‌جمله‌ای است مشروط بر آن‌که متغیرها دارای توان منفی یا توان غیرحسابی یا رادیکال یا قدرمطلق نباشند و در مخرج هم قرار نگرفته باشند. ضمناً بین آن‌ها عمل ضرب باشد، نه جمع یا تفریق.

تذکر: باز هم تأکید می‌شود که نکته‌ی اخیر در مورد متغیرها گفته شد و وجود رادیکال یا قدرمطلق یا توان منفی بر روی ضریب عددی، ایرادی ندارد. ضمناً یادتان باشد که عبارت جبری را حتی‌الامکان ساده کنید تا اشتباهی در تشخیص شما رخ ندهد.

۴- جمع یا تفریق چند یک‌جمله‌ای متشابه (مانند قسمت ه) ایرادی ندارد و عبارت حاصل در صورتی‌که برابر با صفر نشود، هم‌چنان یک‌جمله‌ای می‌باشد. اما اگر پس از ساده کردن عبارت جبری، حداقل ۲ یک‌جمله‌ای نامتشابه با هم جمع یا تفریق شده باشند، آن عبارت، یک جمله‌ای نخواهد بود.

پرسش: آیا $\frac{a^۰}{۲b^{-۱}}$ یک‌جمله‌ای است؟ $x^۰ + ۳$ چه‌طور؟ $\frac{a^۳b}{۲} - ۰$ چه‌طور؟

۱۵- پرسش: چرا درجه‌ی $\sqrt{۳}x^۲yz^۲$ نسبت به متغیر a، برابر صفر است؟

پاسخ: زیرا $\sqrt{۳}x^۲yz^۲ = \sqrt{۳}x^۲yz^۲a^۰$

به همین‌ترتیب $۵ = ۵x^۰y^۰z^۰a^۰$. (البته توجه کنید که x، y، z و a را در این شرایط جزءِ متغیرهای عبارت جبری محسوب نمی‌کنند وگرنه هر عبارت جبری بی‌شمار متغیر داشت!)

در تمرین ۱۵ مراقب دوچیز دیگر باشید: یکی ضریب عددی $\sqrt{۲}a\frac{x}{۵}$ و دیگری درجه‌ی $-a^۲y^۳a^۲$ نسبت به a.

پرسش: ضریب عددی $x^۵za^۲$ چه عددی است؟

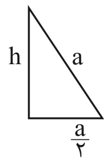
۱۶- به نکته‌ی ۲ در پاسخ تمرین ۱۴ رجوع کنید. اگر صفر را یک‌جمله‌ای در نظر بگیریم، دیگر چیزی به اسم یک‌جمله‌ای یا دوجمله‌ای یا n جمله‌ای معنی نخواهد داشت زیرا:

$۳x = ۳x + ۰$ یا $۲x^۲ - x = ۲x^۲ - x - ۰$

حال اگر عدد صفر را یک‌جمله‌ای بدانیم، $۳x$ یک‌جمله‌ای است یا دوجمله‌ای $(۳x + ۰)$؟

ولی یادتان باشد عدد صفر، عبارت جبری هست.

۱۸- الف) **(راهنمایی:)**



$$h^{۲}+\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=a^{۲} \Rightarrow h^{۲}=a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=\frac{۴a^{۲}-a^{۲}}{۴}=\frac{۳a^{۲}}{۴} \Rightarrow h=...$$

وقتی h برحسب a به‌دست آمد، می‌توانید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را از رابطه‌ی «قاعده × ارتفاع = مساحت مثلث» به‌صورت یک عبارت جبری برحسب a به‌دست آورید.

ج) $۱۶\sqrt{۳}$

۱۹- الف) **(راهنمایی:)** قطر دایره برابر با a است، بنابراین شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ می‌باشد. هم‌چنین مطابق شکل، $S_۱$ (مساحت شکل ۱) برابر است با مساحت مربع به ضلع a منهای مساحت دایره به قطر a (یا شعاع $\frac{a}{۲}$) و مساحت شکل ۲ $(S_۲)$ برابر است با $\frac{۱}{۴}$ مساحت شکل ۱ $\left(\frac{۱}{۴}S_۱\right)$.

ج) **(راهنمایی:)** ابتدا مشخص کنید مساحتی معادل با ab، مساحت کدام شکل است. سپس باید مساحت معادل با $\left(\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)a^{۲}$ را از آن کم کنید تا به جواب مطلوب برسید. توجه کنید که $\left(\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)a^{۲}=۲\left(\frac{۱}{۴}-\frac{\pi}{۱۶}\right)a^{۲}$ یا $\left(\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)a^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\pi}{۴}\right)a^{۲}$

❋ در این‌جا می‌توان مسائل ۲ و ۳ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

یک‌جمله‌ای‌های متشابه

۲۰- دو گزینه جواب هستند.

۲۱- پرسش: آیا اعدادِ غیرصفر، یک‌جمله‌ای‌های متشابه‌اند؟

جمع و تفریق یک‌جمله‌ای‌ها

۲۴- د) **(راهنمایی:)** $\sqrt{۲۷}=\sqrt{۹\times ۳}$ و $\sqrt{۴۸}=\sqrt{۱۶\times ۳}$

و) **(راهنمایی:)** توجه کنید کدام یک‌جمله‌ای‌ها متشابه هستند و آن‌ها را با هم جمع کنید.

پرسش: در چند قسمت از ۶ قسمت تمرین ۲۴، انجام هیچ عمل جمع یا تفریقی امکان‌پذیر نبود؟ چرا؟

پاسخ: در یک قسمت؛ زیرا یک‌جمله‌ای‌های متشابه در آن قسمت وجود نداشت.

پرسش: چند قسمت از تمرین ۲۴ یک‌جمله‌ای نبود؟

پاسخ: ۳ قسمت. در دو قسمت با دو جمله‌ای مواجه بودیم و در یک قسمت دیگر هم حاصل برابر صفر بود که یک عبارت جبری غیر یک‌جمله‌ای و غیر چندجمله‌ای می‌باشد.

۲۵- ۵۲

❋ در این‌جا می‌توان مسئله‌ی ۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۲۶- عبارات جبری دو قسمت، یک‌جمله‌ای می‌باشند.

ج) **(راهنمایی:)** عرض مستطیل $۲R$ است و طول مستطیل برابر با قطر دایره به علاوه‌ی شعاع نیم‌دایره است. مساحت قسمت سایه‌دار برابر است با مساحت مستطیل منهای مجموع مساحت‌های دایره و نیم‌دایره به شعاع R.

ضرب یک‌جمله‌ای‌ها

۲۸- (راهنمایی:) C و D هر دو باید متشابه با یک‌جمله‌ایِ $x^{۲}y^{۳}z$ باشند. (چرا؟) یعنی هریک از C و D به‌صورت $kx^{۲}y^{۳}z$ می‌باشند که k یک عدد حقیقی غیرصفر است. در نتیجه A باید متشابه با یک‌جمله‌ایِ z بوده و B باید متشابه با یک‌جمله‌ایِ $x^{۲}y$ باشد. بنابراین در هر قسمت کافی است ضرایب عددیِ A و B را با توجه به مفروضات و شرایط داده شده تعیین کنیم.

چندجمله‌ای‌ها

۲۹- راهنمایی: اولاً تمام یک‌جمله‌ای‌ها (مثلاً اعداد غیرصفر) چندجمله‌ای نیز محسوب می‌شوند. در این تمرین هم ۲ یک‌جمله‌ای وجود دارد (که یکی از آن‌ها عددی غیرصفر است) و در نتیجه چندجمله‌ای نیز هستند. ثانیاً مجموع یا تفاضل دو یا چند یک‌جمله‌ای، یک چندجمله‌ای خواهد بود. همان‌طور که قبلاً در تمرین ۱۴ ذکر کردیم اگر متغیری دارای توان منفی یا توان غیرحسابی یا رادیکال یا قدرمطلق باشد یا در مخرج قرار گرفته باشد، آن عبارت چندجمله‌ای نیست. البته ابتدا باید عبارت جبری را حتی‌الامکان ساده کنیم. به همین علت حتماً حواستان به قسمت‌های «ک» و «ل» باشد.

پرسش: یک چندجمله‌ایِ درجه n داریم. n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پاسخ: $n \in \mathbb{W}$ یعنی n حتماً عددی حسابی است.

پرسش: یک چندجمله‌ایِ درجه n، حداقل و حداکثر چند جمله دارد؟

پاسخ: یک چندجمله‌ای درجه صفر، همواره دقیقاً یک جمله دارد که آن هم یک عدد حقیقی غیرصفر است. اما اگر n عددی طبیعی باشد، چندجمله‌ایِ درجه n دارای حداقل یک جمله و حداکثر $n+1$ جمله است.

۳۰- راهنمایی: درجه‌ی هر چندجمله‌ایِ یک متغیره برابر است با بزرگ‌ترین توان آن متغیر در چندجمله‌ای. [توجه کنید که باید ابتدا چندجمله‌ای را ساده کنید یعنی نباید یک‌جمله‌ای‌های متشابه در آن چندجمله‌ای وجود داشته باشد.]

جمع و تفریق چندجمله‌ای‌ها

۳۱- ب) **توجه:** « A را از B کم کنید» یعنی $B - A$.

۳۲- د) **توجه:** دقت کنید که کدام یک‌جمله‌ای‌ها متشابه هستند.

ه) **راهنمایی:** $\sqrt{۲۵ \times ۳} = \sqrt{۷۵}$ و $\sqrt{۳۶ \times ۲} = \sqrt{۷۲}$ و $\sqrt{۴ \times ۳} = \sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۲۵ \times ۲} = \sqrt{۵۰}$

۳۳- راهنمایی: اگر عدد انتخابی را x فرض کنیم و عملیات را مرحله به مرحله انجام دهیم، داریم:

$$x \to ۲x + ۶ \to .... \to \frac{۲x + ۶}{۲} - x$$

ضرب یک‌جمله‌ای در چندجمله‌ای

۳۵- راهنمایی: شعاع اولیه ۳ و شعاع ثانویه $x + ۳$ است. محیط اولیه را از محیط ثانویه‌ی دایره کم کنید تا به جواب برسید.

* در این‌جا می‌توان تمرین ۵ از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

ضرب چندجمله‌ای‌ها

۳۶- توجه: در قسمت‌های «الف»، «د» و «ه» حق ندارید از اتحادها استفاده کنید، بلکه باید حتماً از ضرب چندجمله‌ای‌ها حاصل عبارات را به‌دست آورید.

مثلاً در قسمت «د» توجه کنید که $(۳ - ۲y)^۲ = (۳ - ۲y)(۳ - ۲y)$. ضمناً جواب‌های قسمت‌های «و» و «ز» عبارت‌اند از $x^۳y - ۴xy^۳ + xy + ۲y^۲$ و $x^۴ - x^۲y^۲ + x^۲y + xy^۲ - xy^۳ - y^۴$.

پرسش: در قسمت «و»، xy را به $xy^۲$ تبدیل کرده و حاصل‌ضرب $(x^۳ - x^۲y + xy^۲ - y^۳)(x + y)$ را به‌دست آورید.

۳۷- جواب‌ها به‌صورت درهم: $۲x^۴ - ۵x^۳ + ۳x^۲ + ۲x - ۳$ ، $۸x^۴ - ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۳x$ ، $۲x^۳ + x - ۱$ و $۴x^۴ - ۴x^۳ + x^۲$

۳۸- $۱۰a - a^۲$

۳۹- راهنمایی: با توجه به شکل مسأله مشخص است $y + a + x = b$. از این رابطه می‌توان $x + y$ را برحسب a و b به‌دست آورد. مجموع مساحت‌های دو مثلث سایه‌دار برابر است با:

$$\frac{xh}{۲} + \frac{yh}{۲} = \frac{h}{۲}(x + y) = ...$$

کافی است $x + y$ را از رابطه‌ی $y + a + x = b$ به‌دست آورده و در $\frac{h}{۲}(x + y)$ جایگزین کنید تا مجموع مساحت‌های دو مثلث معلوم شود. حال اگر مجموع مساحت‌های دو مثلث را از مساحت مستطیل (یعنی bh) کم کنید، مساحت ذوزنقه برحسب a، b و h به‌دست می‌آید.

توجه: تمرین فوق (۳۹) را بعد از حل مسائل ۵ و ۶ صفحه‌ی ۸۶ کتاب درسی حل کنید.

۴۰- راهنمایی: a و b معکوس یکدیگرند، بنابراین $ab=1$. کافی است از عبارت $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a}$ مخرج مشترک گرفته و این عبارت را به‌صورت یک کسر بنویسید و به جای ab مقدار ۱ را جایگزین نمایید.

۴۱- ۲ و ۲-

راهنمایی: می‌توانید ۴ عدد صحیح متوالی را k، $k+1$، $k+2$ و $k+3$ در نظر بگیرید و حاصل‌ضرب اعداد اول و آخر یعنی $k(k+3)$ و همچنین حاصل‌ضرب دو عدد وسط یعنی $(k+1)(k+2)$ را به‌دست آورید.

برای محاسبه‌ی حاصل $1388\times1389-1387\times1390$ کافی است همه‌ی اعداد را برحسب یکی از آن‌ها (مثلاً برحسب ۱۳۸۷ یا ۱۳۸۸) بنویسید:

$$1388\times1389-1387\times1390=1388\times(1388+1)-(1388-1)(1388+2)=\cdots$$

یا $$1388\times1389-1387\times1390=(1387+1)(1387+2)-1387\times(1387+3)$$

[توجه کنید که اعداد ۱۳۸۷، ۱۳۸۸، ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰ چهار عدد صحیح متوالی هستند.]

اتحادها و تجزیه

۴۲- دو گزینه اتحاد می‌باشند زیرا همواره و به ازای هر xیی برقرارند. [آیا $\sqrt{x^2}=x$ به ازای هر عدد حقیقیِ x برقرار است؟]

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۴۳- د) باید حداقل یکی از a و b برابر صفر باشد. (چرا؟)

۴۴- آیا قسمت «ج» با $(ab+1)^2$ فرقی دارد؟ قسمت «و» بسیار مهم است. همچنین حاصل $(x-\frac{1}{x})^2$ را به‌دست آورید و سعی کنید به ذهن بسپارید. پاسخ قسمت «ح» عدد ۵ است.

۴۵- ج) **راهنمایی:** فرض کنید طرف چپ تساوی $(2a-x)^2$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$2\times2a\times x=16a\Rightarrow x=\cdots$$

با مشخص شدن x، به راحتی تمام جاهای خالی را می‌توان پر کرد.

۴۶- ج) فرض کنید $(a-b)^2=\cdots-4x^2+1$ و آن‌گاه a و b را به‌دست آورید:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=\cdots-4x^2+1$$

واضح است که $b^2=1$ است، بنابراین مقدار b به‌دست می‌آید. همچنین می‌دانیم $2ab=4x^2$، که با داشتن b عبارت a نیز به‌دست می‌آید. حال به راحتی جای خالی پر می‌شود.

د) فرض کنید $(a-b)^2=2x^2-2\sqrt{2}x+\cdots$ و آن‌گاه a و b را به‌دست آورید:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=2x^2-2\sqrt{2}x+\cdots$$

با توجه به $2ab=2\sqrt{2}x$ و $a^2=2x^2$ می‌توان عبارات a و b را به‌دست آورد و با استفاده از آن‌ها $(a-b)^2$ را یافته و جای خالی را پر کرد.

۴۷- راهنمایی: در قسمت‌های «هـ»، «و» و «ز» ابتدا از عامل مشترک در جملات فاکتورگیری کنید. در قسمت «ح» به جای عدد ۲، می‌توانید عبارت $\frac{1}{x}\times x\times2$ را قرار دهید. در قسمت «ط» دقت کنید که $(2^x)^2=(2^2)^x=4^x$ و همچنین $2^{x+1}=2^1\times2^x$

❊ در این‌جا می‌توان مسائل ۶ و ۷ (قسمت‌های «الف» تا «د») از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۴۸- راهنمایی: ابتدا نشان دهید $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. سپس از نکته‌ی زیر استفاده کنید.

$$A^2=B\Rightarrow\sqrt{A^2}=\sqrt{B}\Rightarrow|A|=\sqrt{B}$$

در واقع پس از نشان دادنِ $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$، باید از طرفین تساوی جذر بگیرید. البته یادتان باشد $\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=|\sqrt{2}+\sqrt{3}|$.

❊ در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۸ از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۴۹- راهنمایی: قضیه‌ی فیثاغورس [اگر $a=2rs$، $b=r^2-s^2$ و $c=r^2+s^2$ باشند، نشان دهید $a^2+b^2=c^2$]

پرسش: چرا در صورت مسأله قید شده $r>s>0$؟

۵۰- ب) ۶ و ۰/۵-

۵۱- الف) ۲/۵ و ۱۵

ب) ۵۲ و ۱۰ [**راهنمایی:** اگر طرفین $a-b=۲$ را به توان ۲ برسانید، $a^{۲}+b^{۲}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن $a+b$، ابتدا $(a+b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+۲ab$ را به‌دست آورید.]

* در این‌جا می‌توان مسائل ۲۵، ۲۴، ۱۸ (الف)، ۱۷ (ج)، ۱۶ (ب ـ ج)، ۱۵ (الف ـ ج) و ۱۴ (الف ـ ب) از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۵۳- ب) **راهنمایی:** مساحت هریک از چهار مثلث قائم‌الزاویه برابر با $\frac{۱}{۲}ab$ است، بنابراین مساحت چهار مثلث روی هم برابر با $۴\times\frac{۱}{۲}ab=۲ab$ است. در نتیج مساحت مربع بزرگ (که مساوی با مجموع مساحت مربع داخل به ضلع c و مساحت‌های ۴ مثلث قائم‌الزاویه است) برابر با ..... می‌باشد.

اتحاد مزدوج

۵۴- الف) **راهنمایی:** اولاً توجه کنید کل مساحت شکل (۱) خواسته شده است یعنی مساحت تمام قسمت سایه‌دار و غیر سایه‌دار. ثانیاً مساحت کـل شـکل (۱) برابر است با مساحت مربع به ضلع a منهای مساحت مربع به ضلع b. (چرا؟)

ب) **راهنمایی:** در شکل (۱) کل مربع به ضلع a را در نظر بگیرید. حال در شکل (۲) از یک طرف b واحد به طول مربع (که برابـر بـا a بـود) اضـافه شده و از طرف دیگر b واحد از طول مربع (که برابر با a بود) کم شده است.

ج) **توجه:** در این تمرین با اثبات هندسی اتحاد مزدوج مواجه هستیم. یک اثبات هندسی دیگر از اتحاد مزدوج را در فعالیت صفحه‌ی ۹۰ کتاب درسی دیده‌اید.

۵۵- **راهنمایی:** در قسمت «د» توجه کنید که $۲\sqrt{۲}=\sqrt{۸}$. در قسمت‌های «هـ» و «و» احتیاج به مرتب کردن است. برای این‌کار همواره عباراتی را معیـار قرار دهید که علامت منفی دارند؛ مثلاً در قسمت «هـ» با توجه به عبارتِ $(\sqrt{۳}a-۴)$ عبارت دیگر را به‌صورت $(\sqrt{۳}a+۴)$ بنویسید و در قسمت «و» با توجه به عبارتِ $(\sqrt{x}-۱)$ عبارات دیگر را به‌صورت $(\sqrt{x}+۱)$، $(۱+x)$ و $(۱+x^{۲})$ بنویسید. در دو قسمت آخر هم به‌طریق زیر عمل کنید:

ز) $\left(x+\frac{۱}{x}+۱\right)\left(x+\frac{۱}{x}-۱\right)=\left[\left(\underbrace{x+\frac{۱}{x}}_{a}\right)+۱\right].\left[\left(\underbrace{x+\frac{۱}{x}}_{a}\right)-۱\right]=\cdots$

ح) $(x-y-z)(x+y+z)=\left[x-(\underbrace{y+z}_{t})\right].\left[x+(\underbrace{y+z}_{t})\right]=\cdots$

۵۶- جواب‌ها عبارت‌اند از: ۱-، ۲، $۲\sqrt{۲}$، $۲\sqrt{۲}-۳$ و $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۱}$

راهنمایی:

ج) $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+۱)=[\sqrt{۳}+(\sqrt{۲}-۱)].[\sqrt{۳}-(\sqrt{۲}-۱)]=\ldots$

د) $(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}-\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^{۲}=(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^{۲}+(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^{۲}-۲(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})=\cdots$

در واقع از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کردیم. حال اتحاد مزدوج هم به‌کار می‌آید.

هـ) $(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۱})^{۱۰}\times(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰})^{۱۱}=(\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۰})^{۱۰}\times(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰})^{۱۰}\times(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰})=\cdots$

به‌جای $(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۱})^{۱۱}$، عبارت $(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰})^{۱۰}\times(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۱})$ را جایگزین کردیم. حال توجه کنید که $a^{۱۰}\times b^{۱۰}=(ab)^{۱۰}$ می‌باشد.

و) $(\sqrt{۲}+۱)^{۲۰۰}\times(۳-۲\sqrt{۲})^{۱۰۱}=((\sqrt{۲}+۱)^{۲})^{۱۰۰}\times(۳-۲\sqrt{۲})^{۱۰۰}\times(۳-۲\sqrt{۲})=\cdots$

در ادامه ابتدا حاصل $(\sqrt{۲}+۱)^{۲}$ را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به‌دست آورید. سپس مانند قسمت «هـ» از اتحاد مزدوج کمک بگیرید.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۹ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۵۷- الف) **راهنمایی:** حاصل $(\sqrt{۲}-۱)^{۲}$ را با اتحاد مربع دوجمله‌ای و حاصل $[\sqrt{۶}-(\sqrt{۲}+۱)][\sqrt{۶}+(\sqrt{۲}+۱)]$ را با اتحاد مزدوج به‌دست آورید.

ب) **راهنمایی:** ابتدا حاصل $a^{۲}-b^{۲}$ را با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورید.

۵۹- هـ) $۸xy(۲x+۳y)(۲x-۳y)$

ز) $(b-۳a)(۳b+a)$

ح) $۴y(۱-x)$

ط) $(x+y+۲)(x-y+۲)$

ی) $(x+۲)^{۲}(x-۲)^{۲}$

راهنمایی: در تجزیه‌ی قسمت «الف» رادیکال حضور خواهد داشت. در قسمت «د» ابتدا باید یک فاکتورگیری انجام شود. در قسمت «ج» دوبار از اتحاد مزدوج برای تجزیه استفاده می‌شود.

۶۰- راهنمایی: عبارت $a^۸ - b^۸$ را تا حد امکان تجزیه کنید و در نهایت با توجه به فرض مسأله به جای $a - b$ عدد ۱ را قرار دهید.

* در این‌جا می‌توان قسمت «الف» مسأله‌ی ۲۱ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۶۱- الف) **راهنمایی:** در واقع باید حاصل $(a - b)^۲(a + b)$ را بیابید. (چرا؟)

ب) **راهنمایی:** در واقع باید حاصل $(x - y)$ را بیابید. (چرا؟)

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۱ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۶۲- الف) **راهنمایی:** فرض کنید دو عدد طبیعی متوالی به‌صورت n و $n + ۱$ باشند. حال تفاضلات مربعات آن‌ها یعنی تفاضل $n^۲$ از $(n + ۱)^۲$ را با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورید.

ب) **راهنمایی:** آیا مجموعه‌ی $\{۲n + ۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$ برابر با مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد است؟ چرا؟
آیا تفاضل مربعات دو عدد طبیعی متوالی می‌تواند برابر با ۱ باشد؟

۶۳- جواب‌ها عبارت‌اند از:

۴ , ۲۸ , ۶۲۲۷۵ , ۴۱۶۰۰ , ۱۰۰۲۰۰۱ , ۱۰۰۰ , ۲۰۱۰ , ۹۲۱۶ , ۹۹/۹۱ , ۰/۲

راهنمایی: در قسمت «ح» داریم:

$$\sqrt{۴(۱۰/۱)^۲ - ۹(۶/۶)^۲} = \sqrt{۲^۲(۱۰/۱)^۲ - ۳^۲(۶/۶)^۲} = \sqrt{(۲ \times ۱۰/۱)^۲ - (۳ \times ۶/۶)^۲} = \ldots$$

در قسمت «ط» بعد از استفاده از اتحاد مزدوج، به‌حاصل‌ضرب دو عدد می‌رسید که سپس باید هریک از این دو عدد (یعنی ۱۴ و ۵۶) را تجزیه کنید. یعنی توجه کنید که $۷ \times ۲ = ۱۴$ و $۷ \times ۲^۳ = ۵۶$.

۶۴- نشان دهید $۱۰۱/۰۰۲۵ = (۱۰/۰۵)^۲$

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۰ از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

اتحاد یک جمله‌ی مشترک

۶۵- ج) روش اول: $(a + b)^۲$ را به‌صورت $(a + b)(a + b)$ بنویسید و a را جمله‌ی مشترکِ پرانتزها فرض کرده و حاصل $(a + b)(a + b)$ را با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک بیابید. به‌همین ترتیب در $(a + b)(a - b)$، a را جمله‌ی مشترک و b و $-b$ را جملات غیرمشترک فرض کنید.

روش دوم: می‌دانیم $(x + a)(x + b) = x^۲ + (a + b)x + ab$. حال اگر به‌جای b نیز a را قرار دهید، اتحاد مربع دوجمله‌ای حاصل می‌شود و اگر به‌جای b، $-b$ را جایگزین کنید، اتحاد مزدوج به‌دست می‌آید.

۶۶- هـ) **راهنمایی:** جمله‌ی مشترک ۵ و جملات غیرمشترک $-a$ و $-۴a$ می‌باشند.

ز) **راهنمایی:** $۹۹ \times ۹۸ = (۱۰۰ - ۱)(۱۰۰ - ۲) = \ldots$

ح) **راهنمایی:** $۴۹۹ \times ۵۰۲ = (۵۰۰ - ۱)(۵۰۰ + ۲) = \ldots$

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۲ از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۶۷- د)

$$(۳x \ldots\ldots)(\ldots\ldots + ۵) = ۹x^۲ - ۳x \ldots\ldots$$

واضح است که جای خالی در پرانتز دوم باید با $۳x$ پر شود تا در طرف راست تساوی، $۹x^۲$ ایجاد شود. بنابراین داریم:

$$(۳x \ldots\ldots)(۳x + ۵) = ۹x^۲ - ۳x \ldots\ldots$$

حال فرض می‌کنیم پرانتز اول به‌صورت $(۳x + a)$ و طرف راست تساوی به‌صورت $۹x^۲ - ۳x + k$ باشد. داریم:

$$(۳x + a)(۳x + ۵) = ۹x^۲ - ۳x + k \Rightarrow (۳x)^۲ + (۵ + a)۳x + ۵a = ۹x^۲ - ۳x + k$$

همان‌طور که دیده می‌شود، باید $۵ + a = -۱$ باشد یعنی $a = -۶$. به این‌ترتیب $k = -۳۰$.

۶۸- راهنمایی: در قسمت «ح» ابتدا از علامت منفی (یا به‌عبارت دیگر، از ضریب -۱) فاکتور بگیرید. در قسمت‌های «ط» و «ی» نیز ابتدا باید فاکتورگیری انجام شود.

۶۹- جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(3x^2+1)(3x^2+7)$ ، $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ ، $(x-2)(2x+5)$ ، $(x-3)(3x+2)$ ، $(x-1)(6x-1)$

الف) $9x^4+24x^2+7=(3x^2)^2+8(3x^2)+7$

حال با جایگذاری y به‌جای $3x^2$، می‌توانید y^2+8y+7 را به راحتی تجزیه کنید.

ب) $x^2-2x-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}(4x^2-8x-5)=\frac{1}{4}\left[(2x)^2-4(2x)-5\right]$

حال با جایگذاری y به‌جای $2x$، می‌توانید $\frac{1}{4}(y^2-4y-5)$ را تجزیه کنید.

ج) $2x^2+x-10=A \Rightarrow 2A=4x^2+2x-20 \Rightarrow A=\frac{1}{2}(4x^2+2x-20)=\frac{1}{2}[(2x)^2+1(2x)-20]$

حال با جایگذاری y به‌جای $2x$، می‌توانید $\frac{1}{2}(y^2+y-20)$ را تجزیه کنید.

د) $3x^2+7x-6=A \Rightarrow 3A=9x^2-21x-18 \Rightarrow A=\frac{1}{3}(9x^2-21x-18)=\frac{1}{3}[(3x)^2-7(3x)-18]$

حال با جایگذاری y به‌جای $3x$، می‌توانید $\frac{1}{3}(y^2-7y-18)$ را تجزیه کنید.

هـ) $6x^2-7x+1=A \Rightarrow 6A=36x^2-42x+6 \Rightarrow A=\frac{1}{6}(36x^2-42x+6)=\frac{1}{6}[(6x)^2-7(6x)+6]$

حال با جایگذاری y به جای $6x$، می‌توانید $\frac{1}{6}(y^2-7y+6)$ را تجزیه کنید.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۳ و هم‌چنین قسمت‌های «هـ» تا «ح» مسأله‌ی ۷ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

۷۰- ب) **راهنمایی:** در اتحاد به‌دست آمده‌ی قسمت «الف»، به جای b و c به‌ترتیب $-b$ و $-c$ قرار دهید.

۷۱- ج) $x^4-2x^3-x^2+2x+1$

۷۲- راهنمایی: در واقع باید حاصل $(a^2+2a+1)^2$ را بیابید و سپس عبارت به‌دست آمده را به‌صورت استاندارد بنویسید.

۷۳- راهنمایی: ابتدا حاصل $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2$ را با استفاده از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای به‌دست آورید. توجه کنید که $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ و $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

۷۴-

الف) $x^2+9a^2-12a+4x-6ax+4=x^2+(3a)^2+2^2+2(-6a)+2(2x)+2(-3ax)$

$=x^2+(-3a)^2+2^2+2(-3a)(2)+2(2)(x)+2(-3a)(x)=....$

ب) $a^2+b^2+c^2-1-2ab-2ac+2bc=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc-1$

$=[(-a)^2+b^2+c^2+2(-a)(b)+2(-a)(c)+2(b)(c)]-1^2=....$

حال کافی است از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای و سپس از اتحاد مزدوج استفاده کنید.

ج) $a^2-b^2+c^2-2c+2ac-2a+1=a^2+c^2+1^2-2c+2ac-2a-b^2$

$=[a^2+c^2+(-1)^2+2(-1)(c)+2(a)(c)+2(-1)(a)]-b^2=.....$

حال کافی است از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای و سپس از اتحاد مزدوج استفاده کنید.

۷۵- ۱۱- [**راهنمایی:** می‌دانیم $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$. حال طبق مفروضات صورت مسأله جایگذاری‌های $a+b+c=4$ و $a^2+b^2+c^2=38$ را انجام می‌دهیم. توجه به این موضوع هم‌لازم است که $a(b+c)+bc=ab+ac+bc$.]

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب دو جمله

۷۶- ز) **راهنمایی:** ابتدا مزدوج، سپس چاق و لاغر!

ح) **راهنمایی:** $(x-۲)$ لاغر و $(x^۲+۲x+۴)$ چاق به‌نظر می‌رسند! در نهایت موجود حاصل از آن‌ها با $(x^۳+۸)$ مزدوج می‌شود!

ط) **راهنمایی:** توجه کنید که $a-b=(\sqrt[۳]{a})^۳-(\sqrt[۳]{b})^۳$. حال کافی است به‌جای $\sqrt[۳]{a}$ و $\sqrt[۳]{b}$ به‌ترتیب x و y قرار دهید.

$$(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})\text{.........}=a-b\Rightarrow(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})\text{.........}=(\sqrt[۳]{a})^۳-(\sqrt[۳]{b})^۳\xrightarrow{\sqrt[۳]{a}=x,\sqrt[۳]{b}=y}(x-y)\text{.........}=x^۳-y^۳$$

اکنون می‌توانید جای خالی را بیابید.

ی)

$$(۴x\text{..........})(۱۶x^۲\text{..........}+\frac{۱}{۴})=۶۴x^۳-\frac{۱}{۸}\Rightarrow(۴x\text{..........})\left[(۴x)^۲\text{.........}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\right]=(۴x)^۳-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$$

$$\xrightarrow{۴x=a\ ,\ \frac{۱}{۲}=b}(a-\text{......})(a^۲+\text{......}+b^۲)=a^۳-b^۳$$

حال می‌توانید جاهای خالی را پر کنید.

۷۷- راهنمایی: در قسمت‌های «ب»، «ج» و «د» ابتدا باید فاکتورگیری انجام دهید. در قسمت «هـ» دو بار از اتحاد چاق و لاغر استفاده شده و در نهایت به حاصل‌ضرب ۳ پرانتز تجزیه می‌شود. در قسمت «ز» ابتدا از اتحاد مربع دوجمله‌ای و سپس از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌شود. و در آخر می‌رسیم به قسمت «و»:

روش اول: اگر $۶۴-a^۶$ یا به‌عبارت دیگر $۲^۶-a^۶$ را به‌صورت $(a^۳)^۲-(۲^۳)^۲$ نوشته و ابتدا از اتحاد مزدوج و سپس از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنید، آن‌گاه عبارت مذکور به‌صورت $(a-۲)(a+۲)(a^۲-۲a+۴)(a^۲+۲a+۴)$ تجزیه خواهد شد.

روش دوم: اگر $۲^۶-a^۶$ را به‌صورت $(a^۲)^۳-(۲^۲)^۳$ نوشته و ابتدا از اتحاد چاق و لاغر و سپس از اتحاد مزدوج استفاده کنید، آن‌گاه به $(a-۲)(a+۲)(a^۴+۴a^۲+۱۶)$ می‌رسید. توجه کنید که هر دو جواب قابل قبول است زیرا $a^۴+۴a^۲+۱۶=(a^۲+۲a+۴)(a^۲-۲a+۴)$. برای اثبات این موضوع به‌طریق زیر می‌توان عمل کرد.

$$(a^۲-۲a+۴)(a^۲+۲a+۴)=[(a^۲+۴)-۲a][(a^۲+۴)+۲a]\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(a^۲+۴)^۲-(۲a)^۲=a^۴+۱۶+۸a^۲-۴a^۲=a^۴+۴a^۲+۱۶$$

* در این‌جا می‌توان مسائل ۲۲ و ۲۳ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

۷۸- ز) **راهنمایی:** ابتدا $(۴x^۲-۴xy+y^۲)$ را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تغییر دهید.

ح) **راهنمایی:** در واقع باید حاصل $(x^۲-۱)^۳$ را بیابید. (چرا؟)

ط) **راهنمایی:** $۱۰۱^۳=(۱۰۰+۱)^۳$

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۹ و هم‌چنین مسائل ۱۴ (ج ـ د)، ۱۵ (ب ـ د)، ۱۶ (الف ـ د)، ۱۷ (الف ـ ب) و ۱۸ (ب) از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۷۹- توصیه می‌شود جواب‌های به‌دست آمده را امتحان کنید. مثلاً اگر جواب یکی از قسمت‌ها را $\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۳$ به‌دست آوردید، حاصل $\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۳$ را مثل تمرین قبل (۷۸) پیدا کنید تا از درستی جوابتان مطمئن شوید. ضمناً جواب قسمت «هـ» برابر است با $(x+۱)^۳(x^۲-x+۱)^۳$.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۲۰ از تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

۸۰- راهنمایی: $B-C+A=(۲x-۱)^۲$

۸۱- جواب‌ها عبارت‌اند از ۲/۵ ، ۳ ، ۶- و $۲\sqrt[۳]{۲}$

در قسمت‌های «الف» و «د» ابتدا از اتحاد چاق و لاغر استفاده کرده و سپس x را جایگزین نمایید. در قسمت «ب» توجه کنید که عبارت درون پرانتز یعنی $a^۲-۲a+۱$ یادآور اتحاد مربع دوجمله‌ای است. در قسمت «ج» هم باید عدد ۱ را کم و اضافه کنید.

$$a^۳-۳a^۲+۳a=(a^۳-۳a^۲+۳a-۱)+۱=(a-۱)^۳+۱=\text{....}$$

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۲۱ (ب، ج) تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش را مطرح کرد.

تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش

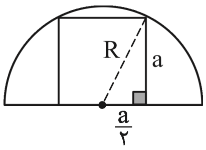
۱- الف) صفر ـ یک

ب)

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{y+x}{xy}\xrightarrow{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=x+y}x+y=\frac{x+y}{xy}$$

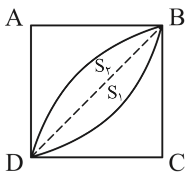
اگر $x+y=\frac{x+y}{xy}$ باشد با توجه به قسمت «الف» می‌توان گفت صورت برابر صفر یا مخرج برابر یک است، یعنی ...

۲- درجه = ۲ ضریب عددی = $\frac{\pi}{۲}-\frac{۴}{۵}$



راهنمایی: اگر طول هر ضلع مربع را a فرض کنیم، مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه‌ی a و $\frac{a}{۲}$ و وتر R داریم، یعنی $a^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=R^۲$.

۳- درجه = ۲ ضریب عددی = $\frac{\pi}{۲}-۱$



راهنمایی: در مربع $ABCD$ قطر BD را رسم می‌کنیم. مساحت خواسته شده $S_۱+S_۲$ است که با توجه به $S_۱=S_۲$، کافی است یکی از این دو مساحت ($S_۱$ و $S_۲$) را به‌دست آوریم. مساحت $S_۱$ برابر است با مساحت ربع دایره‌ی ABD منهای مساحت مثلث ABD.

۴- ۴۸ و ۲۵ و ۷- [(**راهنمایی:** در قسمت «ب» حاصل $(a-b)(a+c)$ خواسته شده است. (چرا؟)]

۵- $x^۲+۴x$ و $x^۲-۴x$ و $۸x$

۶- ۱۳۴ ، ۲۲۹ ، ۴۵۱ و $۳۲۷۶۷=۲^{۱۵}-۱$

راهنمایی: هریک از عبارات زیر رادیکال را می‌توان با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای نوشت. مثلاً:

د) $۴^a-۲^{a+۱}+۱=(۲^۲)^a-۲^a\times ۲^۱+۱=(۲^a)^۲-۲(۲^a)+۱=....$

ج) $(۴-a^۲)^۲+۱۶a^۲=۱۶+a^۴-۸a^۲+۱۶a^۲=۱۶+a^۴+۸a^۲=۴^۲+(a^۲)^۲+۲(۴)(a^۲)=...$

۷- قسمت‌های «الف» تا «د» با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و قسمت‌های «ه» تا «ح» با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک تجزیه می‌شوند و جواب‌ها عبارت‌اند از: $(x+۳)(۵-۲x)$ ، $(x-۱)(x+۱)(۳x^۲+۲)$ ، $\frac{۱}{۲}(۴x^۲-۱)^۲$ ، $(۳x+۲\sqrt{۲})^۲$ ، $(xy^۲+z^۲)^۲$ ، $(x^۲y-۲z)^۲$

$(x-۰/۲)(x-۰/۸)$ ، $(x+۶)\left(x+\frac{۲}{۳}\right)$

راهنمایی: در قسمت‌های «ه» تا «ح» ابتدا $۱۰۰A$، $۹B$، $-۲C$ و $۳D$ را ایجاد کرده و تجزیه نمایید.

۸- الف) با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌دانیم $۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲$. از طرفی $۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲۴}$ است و در نتیجه کوچک‌تر از $\sqrt{۲۵}$ می‌باشد. یعنی $۵>۲\sqrt{۶}$ است و در نتیجه ....

[برای درک بهترِ راه‌حل این مسأله، مربع $\sqrt{۱۰}$ و مربع $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ را به‌صورت $۵+\sqrt{A}$ بنویسید. مثلاً $۵+\sqrt{۲۵}=۵+۵=۱۰=(\sqrt{۱۰})^۲$]

ب) **توجه:** $۷+۲\sqrt{۲}$ از دو عدد دیگر بزرگ‌تر است. راستش را بخواهید یک اشتباه تایپی در صورت مسأله رخ داده است و باید به جای $۷+۲\sqrt{۲}$ عدد $\sqrt{۷}+۲\sqrt{۲}$ می‌بود. در این‌صورت مربع سه عدد را می‌توانستیم به‌صورت $۱۵+\sqrt{۲۲۵}$ و $۱۵+\sqrt{۲۱۶}$ و $۱۵+\sqrt{۲۲۴}$ بنویسیم.

۹-

$$(۱۰^۲+۸^۲+۶^۲+۴^۲+۲^۲)-(۹^۲+۷^۲+۵^۲+۳^۲+۱^۲)=(۱۰^۲-۹^۲)+(۸^۲-۷^۲)+(۶^۲-۵^۲)+(۴^۲-۳^۲)+(۲^۲-۱^۲)=......$$

حال هریک از ۵ پرانتز فوق را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه کنید تا به پاسخ برسید.

$\sqrt{۲}-۱$ عددی مثبت است و در نتیجه $\sqrt{۲}-۱=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$. بنابراین:

$$(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۳+\sqrt{۸}})=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲(۳+\sqrt{۸})}=....$$

۱۰- $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{8}-1$ ، $\sqrt{4/5}+\sqrt{2/5}$ ، $\sqrt{5}+1$ ، $\sqrt{3}+1$

۱۱- ۴- و ۱/۵-

۱۲- جواب‌ها به‌صورت درهم عبارت‌اند از:

x^4-x ، $x^2+y^2-2xy+3x-3y+2$ ، $x^6+y^6+2x^3y^3$ ، x^6-y^6 ، x^6-64 ، $30x^2+250$ ، $32x^4-1250$ ،
$x^4-2x^3+x^2-36$ ، x^5-5x^3+4x ، $4x^4+8x^2+4$ ، x^6+x^3-2 ، x^2-x^8

راهنمایی: ب) $4x+10=2(x+5)$

ج) $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$

د) $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ و $(x^2-x-6)(x^2-x+6)=[(x^2-x)-6][(x^2-x)+6]$

ه) $(x-y+1)(x-y+2)=[(x-y)+1][(x-y)+2]$

ز) $x^2-x=x(x-1)$

ح) $(1-x)(1+x)(x^2+x^4+x^6)=(1-x^2)(1+x^2+x^4)x^2$

ط) $(x+2)(\frac{x}{2}-1)(2x^4+8x^2+32)=(x+2)(x-2)(x^4+4x^2+16)$

ی) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

ک) $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

۱۳-

الف) $(x-2)(x+2y-2)$
ب) $(a^2+c^2)(b^2+d^2)$
ج) $(x-1)(x+1)(y+1)(y-1)$
د) $(2x-3y)(2x+3y+1)$
ه) $(a-b)(a+b)(c+d)(c-d)$
و) $(2x-y)(2x-y-2)(2x-y+2)$
ز) $(x+y-1)(x-y+1)$
ح) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)$
ط) $(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)$
ی) $(x-3)(x-2)x(x+2)(x+3)$
ک) $(x-3)(x+1)(x^2+3)$
ل) $(x-5y)(x-4y)$
م) $(x+3y)(x-2y)$
ن) $(x-2)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$
س) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$
ع) $(x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+4)$
ف) $(x^2+x+1)(xy-y+1)$
ص) $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

راهنمایی:

الف) $(x^2-4x+4)+(2yx-4y)$
د) $(4x^2-9y^2)+(2x-3y)$
و) $(2x-y)^3-4(2x-y)$
ز) $x^2-(y^2-2y+1)$
ح) $(x^6-x^4)-(x^2-1)$
ی) $x^2(x^4-13x^2+36)$
ک) $(x^4-9)-(2x^3+6x)$
س) $(x^5-x^3)-(x^2-1)$
ع) $(x^7+x^4)-16(x^3+1)$
ف) $(x^3y-y)+(x^2+x+1)$
ص) $(x^7+x^6)+(x^5+x^4)+(x^3+x^2)+(x+1)$

در راهنمایی‌های بالا دسته‌بندی‌های لازم را انجام دادیم تا تجزیه آسان‌تر انجام شود.
در قسمت‌های «ط»، «ی»، «ل»، «م» و «ن» از اتحاد یک جمله‌ی مشترک استفاده کنید.

۱۵- ۴۴، ۲۷۲، $2\sqrt{6}$ و $108\sqrt{6}$

راهنمایی: برای محاسبه‌ی $x-y$، از رابطه‌ی $|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$ استفاده کنید.

۱۶- ۱۰، $\sqrt{2}$، $14\sqrt{2}$ و $18\sqrt{2}$

راهنمایی: برای حل قسمت‌های «الف»، «ب» و «د» به‌ترتیب از اتحادهای فرعی «د»، «ب» و «ج» مسأله‌ی ۱۴ بخش سخت‌کوش استفاده کنید.
برای محاسبه‌ی $x+y$ نیز از رابطه‌ی $|x+y|=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}$ استفاده نمایید.

۱۷- الف) ۷ و ۱۸ [**راهنمایی:** $x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$ و $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$]

ب) ۲، ۳ و ۵ [**راهنمایی:** xy را با کمک رابطه‌ی «د» تمرین ۱۴ سخت‌کوش به‌دست آورید و سپس x^2+y^2 را از رابطه‌ی «ب» همان تمرین بیابید. برای محاسبه‌ی $|x+y|$ نیز یادتان باشد که $|x+y|=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}$]

ج) ۵

۱۸- الف) ۱۸ و $2\sqrt{5}$ [**راهنمایی:** $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$ و $\left|x+\frac{1}{x}\right|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}$]

ب) ۳ و ۱۸ [**راهنمایی:** $\left|x+\frac{1}{x}\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}$ و $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$]

۱۹-

$$a^2-a=a(a-1)\xlongequal{a=1-b}....$$

$$a(a+1)+b(b+1)=a^2+a+b^2+b=\underbrace{a^2+b^2}_{(a+b)^2-2ab}+a+b=....$$

$$3(a^2+b^2)-2(a^3+b^3)=3[(a+b)^2-2ab]-2[(a+b)^3-3ab(a+b)]=...$$

۲۰-

الف) $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3\Rightarrow ....$

ب) $(x+1)^3+(x-1)^3-8x^3=(x+1)^3+(x-1)^3+(-2x)^3=...$

توجه کنید که اگر $a=x+1$، $b=x-1$ و $c=-2x$ فرض شوند، آن‌گاه $a+b+c=0$ است زیـرا $a+b+c=(x+1)+(x-1)+(-2x)=0$.
بنابراین طبق قسمت «الف»، $a^3+b^3+c^3=3abc$ می‌باشد.

۲۱- الف) $\frac{1}{32768}=\frac{1}{2^{15}}$

راهنمایی:

$$A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^8}\right)\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)A=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^8}\right)$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)A=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^8}\right)\Rightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)A=\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{x^8}\right)\Rightarrow\cdots$$

وقتی عبارت طرف راست را به اندازه‌ی کافی ساده کردید، آن‌گاه در طرفین تساوی، عدد ۲ را قرار دهید و ...

ب) ۱۷ و ۶۳۵ [**راهنمایی:** $25a^2-20a+4$ را بـه‌صـورت مربـع دوجملـه‌ای بنویـسید. البتـه یادتـان باشـد کـه $\sqrt{u^2}=|u|$. ضـمناً بـرای آن‌که $8x^3-12x^2+6x-1$ را بهتر به یاد بیاورید، بد نیست به مسأله‌ی ۷۸ قسمت «د» یا مسأله‌ی ۷۹ قسمت «ب» نگاهی بیندازید.]

ج) $\frac{1}{1024}=\frac{1}{2^{10}}$ [**راهنمایی:** $(2^{10})^3-(1)^3$ را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه کنید.]

۲۲- اگر یک‌بار $a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$ را ابتدا با اتحاد چاق و لاغر (و سپس اتحاد مزدوج) تجزیـه کنیـد و بـار دیگـر $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$ را ابتدا با اتحاد مزدوج (و سپس اتحاد چاق و لاغر) تجزیه نمایید، در نهایت نتیجه می‌شود $a^4+b^4+a^2b^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

۲۳-

ج) $4a^4+81b^4=(2a^2)^2+(9b^2)^2=(2a^2+9b^2)^2-2(2a^2)(9b^2)=(2a^2+9b^2)^2-36a^2b^2=(2a^2+9b^2)^2-(6ab)^2=.....$

د) $a^4+b^4+a^2b^2=a^4+b^4+2a^2b^2-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=......$

هـ) $a^4+b^4-47a^2b^2=a^4+b^4+2a^2b^2-49a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(7ab)^2=......$

و) $x^4+49-2x^2=x^4+7^2+14x^2-16x^2=(x^2+7)^2-(4x)^2=.....$

ز) $x^4+9+2x^2=x^4+3^2+6x^2-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2=.....$

ح) $4b^2+4b-a^2+2a=4b^2+4b+1-a^2+2a-1=(4b^2+4b+1)-(a-1)^2=.....$

ط) $x^3+2x^2+2x+1=(x^3+x^2)+(x^2+2x+1)=......$

ی) $x^5+2x^2-x+1=(x^5+x^2)+(x^2-x+1)=x^2(x^3+1)+(x^2-x+1)=........$

توجه کنید که در برخی قسمت‌ها می‌توانستیم به روش دیگری عمل کنیم. مثلاً در قسمت «ح» می‌توانستیم دسته‌بنـدی $(4b^2-a^2)+2(2b+a)$ را انجام دهیم یا در قسمت «ط» می‌شد با $(x^3+1)+2x(x+1)$ کار کرد.

۲۴- ج) ۱- و ۱

۲۵- الف) ۹ ب) ۹ ج) ۳

راهنمایی: در قسمت‌های «الف» و «ب» نشان دهید $x=y=0$ و $x=y$. در قسمت «ج» هم در صورت کسر به جای $(2x-y)^2$، $-6xy$ را قرار دهید و از همین رابطه [یعنی $(2x-y)^2=-6xy$] عبارت $4x^2+y^2$ را برحسب xy به‌دست آورده و در مخرج کسر قرار دهید.