



جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۳

توان رسانی و قواعد آن

۱- ب) **راهنمایی:** $۲^۶ = ۶۴$ است، بنابراین بعد از ۶ دوره‌ی زمانی ۶۴ سلول ایجاد می‌شود.

۲- ۲۷۰ میلیون

۳- **راهنمایی:** ارزش این ماشین در هر سال، برابر با ۹۰ درصد ارزش ماشین در سال قبل است.

[در پایان سال سوم ارزش ماشین ۷/۲۹ میلیون تومان است.]

۴- **راهنمایی:** ابتدا نشان دهید توپ در هر مرحله، $\frac{۳}{۴}$ مرحله‌ی قبل بالا می‌رود. در نتیجه پس از n بار، $\left(\frac{۳}{۴}\right)^n \times ۲۵۶$ سانتی‌متر بالا می‌رود.

* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۱ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۵- جواب بعضی قسمت‌ها به صورت درهم: ۲۵، ۳۱، ۳۱۵، ۳۱۳، ۳۷، ۷۲۱ و ۵۱۰۲

۷- **راهنمایی:** طرفین تساوی را در قسمت «ج» بر ۵ و در قسمت «د» بر ۲ تقسیم کنید. در قسمت‌های «ه» و «و» اعداد ۱۰۸ و ۲۲۵ را تجزیه کنید.

۸- سه قسمت همواره درست

۹- **توجه:** در قسمت «د»، $y^{n+۶} \div y = y^{(n+۶)-۱}$ برابر است با $y^{n+۵}$.

ضمناً در همه‌ی قسمت‌ها یادتان باشد باید جواب نهایی را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$۱۰-۶۴ = n \quad [\text{راهنمایی:} \dots \Rightarrow ۲^{۱۰} = ۷n + ۹n = ۲^{۱۰} \Rightarrow ۷ \times n + ۳ \times ۳n = ۲^{۱۰}]$$

۱۲- دو قسمت همواره درست

۱۳- ۲ **راهنمایی:** وقتی مجموع دو عدد برابر با صفر است، آن دو عدد قرینه‌ی یکدیگرند، یعنی $b = -a$. با جایگذاری $-a$ به جای b ، به جواب

می‌رسید.

۱۴- جواب همه‌ی قسمت‌ها به جز «الف» و «ب» به صورت درهم:

$$\left(\frac{۵}{۲}\right)^۵ = (۲/۵)^۵, \left(\frac{۶}{۵}\right)^۴ = (۱/۲)^۴, ۲۴^۲, ۲۴^۳, \left(\frac{X}{Y}\right)^۲, \left(-\frac{۳X}{۲Y}\right)^۳$$

۱۵- ج) **راهنمایی:** $۱۶^۲ = ۲۵۶$ است، بنابراین باید $۱۶^{۳۶}$ را به صورت $۱۶^X \times ۱۶^{X+۲}$ بنویسیم زیرا $۱۶^۲ = ۲۵۶$.

د) **راهنمایی:** باید $۱۶^X \times ۱۶^X \times ۱۶^X \times ۱۶^X = ۱۶^{۳۶}$.

ه) **راهنمایی:** باید $y^{۳۶} \times y^{۳۶} \times y^{۳۶} \times y^{۳۶} = ۱۶^{۳۶}$.

و) **راهنمایی:** باید $Z^{۱۲} \times Z^{۱۲} \times Z^{۱۲} = ۱۶^{۳۶}$.

پرسش: عدد $۱۶^{۳۶}$ را به صورت حاصل ضرب دو عدد متمایز توان‌دار بنویسید.

به توان رساندن اعداد توان‌دار

۱۶- دو علامت و یک علامت

۱۷- جواب همه‌ی قسمت‌ها به جز «الف» و «ب» به صورت درهم:

$$۱۷۵^۳, ۲۰^۶, ۶^۳, ۵^{۷۲}, ۳^{۱۷}, ۲^{۲۷} = ۸^۹, ۲^۷, \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲, ۱^k$$

* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۲ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد. (به جز قسمت «ط»)

۱۸- ج) ۲^۲



$$۱۹- \text{ (اهنمایی): } \text{ثالث عدد } ۲۷^{۱۱} \text{ برابر است با } ۳^{۳۳} = \frac{(۳^۳)^{۱۱}}{۳} = \frac{۲۷^{۱۱}}{۳}. \text{ مکعب عدد } ۴^۳ \text{ نیز برابر است با } ۴^۹ = ۲^{۱۸} = (۴^۳)^۳.$$

* در این جا می‌توان مسائل ۳ و ۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۲۰- الف، ب، ج، ۴ و ۱

$$\frac{۸^{۲x}}{۴} = ۱۶^۳ \Rightarrow ۸^{۲x} = ۴ \times ۱۶^۳ \Rightarrow (۲^۳)^{۲x} = ۲^۲ \times (۲^۴)^۳ \Rightarrow ۲^{۶x} = ۲^{۱۴} \Rightarrow x = \frac{۱۴}{۶} = \frac{۷}{۳} \quad (د)$$

البته به ازای $x = \frac{۷}{۳}$ ، داریم $۸^{۲x} = ۸^{\frac{۱۴}{۳}}$. اگر چه $۸^{\frac{۱۴}{۳}}$ همان $۲^{۱۴}$ است، اما توان غیرصحیح را در فصل اول ریاضیات ۲ خواهید خواند. در نتیجه حل قسمت «د» الزامی نیست.

پرسش: اگر مربع $۸^{۲x}$ برابر با مکعب ۱۶ باشد، x را بیابید.

۲۱- ج) $۸۱^۲$ و ۹

۲۲- ج، د، ه) $۳^۹$ ، $۹^۹$ و $۹^۶$

$$\text{ (ب) (اهنمایی): } ۹ = ۳^۲ \text{ است و از طرفی } ۲۷^{۱۲} = ۳^{۳۶} \text{ می‌باشد. پس باید } ۳^x \times ۳^{x+۲} = ۳^{۳۶} \text{ باشد زیرا } ۳^۲ = ۹. \frac{۳^{x+۲}}{۳^x} = ۳^۲ = ۹$$

۲۳- (اهنمایی): اگر طول هر ضلع مربع را a فرض کنیم، محیط مربع $۴a = ۲^۸$ خواهد بود یعنی $۴a = ۲^۸$. به این ترتیب a به دست می‌آید و با داشتن a ، مساحت مربع یعنی $a^۲$ نیز معلوم می‌شود.

$$۲۴- \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

$$۲۵- ۸ و \frac{۸}{۲۷} \text{ [(اهنمایی): در قسمت «الف» ابتدا از } a^{۵^\circ} = ۲a^{۳^\circ} \text{ می‌توانید } a^{۲^\circ} \text{ را بیابید. در قسمت «ب» ابتدا نشان دهید } x^۲ = ۱/۵y^۲.]$$

* در این جا می‌توان مسائل ۶ (قسمت‌های «الف» و «ب»)، ۷، ۸ و ۹ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

مقایسه‌ی اعداد توان‌دار

۲۷- (و) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک اعداد ۱۲ و ۱۸ برابر با ۶ است، بنابراین هر دو عدد $۳^{۱۸}$ و $۳^{۱۲}$ را با توان ۶ می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} ۳^{۱۲} &= ۳^{۲ \times ۶} = (۳^۲)^۶ = ۹^۶ \\ ۳^{۱۸} &= ۳^{۳ \times ۶} = (۳^۳)^۶ = ۸^۶ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots$$

در قسمت‌های «د» و «ه» نیز به همین ترتیب، توان‌ها را یکسان کنید. در قسمت «ج» هم باید توان‌ها یکی شود. در قسمت‌های «الف» و «ب» پایه‌ها را یکی کنید.

۲۸- الف) (اهنمایی): نشان دهید $۲^{۱۲} < ۹^۴$.

ب) (اهنمایی): نشان دهید سه عدد مذکور، $۱۲۸^۳$ و $۱۰۰^۳$ و $۸۱^۳$ می‌باشند.

ج) (اهنمایی): بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد، $A = ۲^{۱۵} \times ۳^{۱۴} \times ۵^{۱۲}$ است و دو عدد مذکور، $۶A$ و $۵A$ هستند. (چرا؟)

۲۹- توجه: به‌طور کلی در اعداد مثبت، اگر طرفین نامساوی را به توان عدد مثبتی برسانیم تغییری در جهت نامساوی ایجاد نمی‌شود.

در تمرین ۲۹ برای رد کردن گزینه‌ی نادرست، مثال بزنید.

۳۰- (اهنمایی): داریم $b < a < 1 < a < 0$ ، پس $0 < a < b$ می‌باشد و به این ترتیب قسمت‌های «ج» و «د» به کمک تمرین ۲۹ حل می‌شوند. اما در مورد قسمت‌های «الف» و «ب» به این نکته توجه کنید که اعداد بزرگ‌تر از ۱، هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. در حالی که برای اعداد بین صفر و یک، برعکس است یعنی هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود.

۳۱- (اهنمایی): هر سه عدد را با پایه‌ی یکسان (مثلاً $۵/۵$) بنویسید. در مقایسه‌ی اعداد با پایه‌ی یکسان به یاد داشته باشید که اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگ‌تری برسند، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود.



توان صفر و توان منفی

۳۲- **راهنمایی:** یک بار a^{n-n} و بار دیگر $\left(\frac{a}{a}\right)^n$ به دست می‌آید.

$$۳۳- ۱، ۲۲۵، \frac{۲۷۵}{۱۰۸}، ۲۱ و \frac{۳a^۴+۴}{a^۴}، ۳-۴a^{-۴}+۳$$

* در این جا می‌توان قسمت «ط» از مسأله‌ی ۲ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۳۴- جواب‌ها به صورت درهم عبارت‌اند از:

$$\left(\frac{۱}{۶}\right)^۲، \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴، (۰/۸)^۳، \left(\frac{۳}{۵}\right)^۱، ۵^۳، \left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۷، \left(\frac{b}{a+b}\right)^۲، \left(\frac{b}{a}\right)^۲، \left(\frac{a^۲}{y}\right)^۲$$

۳۵- جواب‌ها به صورت درهم:

$$\left(\frac{x}{yz}\right)^{-۱}، \left(\frac{۳x^۲}{y}\right)^{-۳}، \left(\frac{x}{y}\right)^{-۲}، ۲^{-۲}، ۶^{-۴}، \left(\frac{۲}{۱۵}\right)^{-۲}، (۲/۵)^{-۳} و (۰/۰۵)^{-۲}$$

۳۶- قسمت‌های «ب» و «ه» را به عنوان نمونه حل می‌کنیم:

ب) $\frac{۱}{x^۹} = ۸x^{-۹} = ۲^۳ \times (x^{-۳})^۳ = (۲x^{-۳})^۳ \rightarrow$ هر دو قابل قبول‌اند.

ه) $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۶}\right)^{-۲} = \left(\frac{۶}{\sqrt{۳}}\right)^۲ = \frac{۳۶}{۳} = ۱۲$

۳۷- جواب‌ها به صورت درهم: $\frac{-۲}{۹}$ ، $\frac{۱}{۹۳۱۶}$ ، $\frac{۱}{۲۷}$ ، $\frac{۱}{۶}$ ، ۸۱ و ۹۶

۳۸- حل قسمت «ب» به‌عنوان نمونه:

ب) $۴^۳ = ۲^x = \frac{۱}{۲^y} = \frac{۱}{۸^z}$

$$۴^۳ = (۲^۲)^۳ = ۲^۶ \Rightarrow x = ۶ ; ۴^۳ = ۲^۶ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۶} = \frac{۱}{۲^{-۶}} \Rightarrow y = -۶ ; ۴^۳ = \frac{۱}{۲^{-۶}} = \frac{۱}{(۲^۳)^{-۲}} = \frac{۱}{۸^{-۲}} \Rightarrow z = -۲$$

۳۹- **راهنمایی:** $\frac{۱}{۸} = ۲^{-۳}$ است، بنابراین $\left(\frac{۱}{۸}\right)^۴ = (۲^{-۳})^۴ = ۲^{-۱۲}$. حال باید $۲^{-۱۲}$ را با توان -۲ ، با توان ۳ و با پایه‌ی $\frac{۱}{۴}$ بنویسید. موفق باشید!

۴۰- الف) **راهنمایی:** ۳ عدد را با پایه‌ی ۲ بنویسید و ... [توجه: برای مقایسه‌ی اعداد توان‌دار با پایه‌ی یکسان و بزرگ‌تر از ۱، یادتان باشد که توان بزرگ‌تر،

عدد بزرگ‌تری ایجاد می‌کند. مثلاً $۳^{-۷} > ۳^{-۵}$ می‌باشد زیرا پایه‌ها مشابه و بزرگ‌تر از ۱ بوده و ضمناً $-۷ > -۵$]

البته در این قسمت می‌توانید توان‌ها را مثبت کنید (کافی است ۳ عدد را با پایه‌ی $\frac{۱}{۴}$ بنویسید) و سپس اعداد را مقایسه کنید. در واقع قسمت «ب» به همین نکته می‌پردازد.

ب) **راهنمایی:** $\frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$ ، $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ و $\frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$

ج) **راهنمایی:** ۳ عدد را با توان مثبت بنویسید. در این صورت مقایسه‌ی $(۰/۲)^{-۷}$ و $(۰/۴)^{-۷}$ خیلی آسان خواهد بود. برای مقایسه‌ی $(۰/۲)^{-۷}$

و $(۰/۴)^{-۴}$ بعد از مثبت کردن توان‌ها، هر دو عدد را با پایه‌ی ۵ بنویسید.

* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۶ (قسمت «ج») و ۵ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

نماد علمی

ج) $0/003050 \times 14000 = 3/05 \times 10^{-3} \times 1/4 \times 10^4 = \dots$

-۴۱

د) $\frac{1}{4000} = \frac{1}{4 \times 10^3} = \frac{1}{4} \times 10^{-3} = \dots$

ه) $\frac{0/00027 \times 10^{-6}}{0/0009 \times 10^{-4} \times \frac{2}{5}} = \frac{0/00027}{0/0009} \times \frac{10^{-6}}{10^{-4} \times 0/4} = \frac{2/7 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-4}} \times \frac{10^{-2}}{0/4} = \dots$

و) $\frac{36 \times 10^{-11}}{23 \times 10^2} \times \frac{9/2 \times 10^7}{4/5 \times 10^{-15}} = \frac{36}{4/5} \times \frac{9/2}{23} \times \frac{10^{-11} \times 10^7}{10^2 \times 10^{-15}} = \dots$

ز) $6/4 \times 10^{10} - 6/4 \times 10^9 = 6/4 \times 10^9 (10 - 1) = \dots$

ح) $3/12 \times 10^{-7} - 4/28 \times 10^{-6} + 0/264 \times 10^{-5} = 3/12 \times 10^{-6} - 4/28 \times 10^{-6} + 2/64 \times 10^{-6} = \dots$

ط) $\frac{0/0036 \times 50^4}{1500} = \frac{3/6 \times 10^{-3}}{1/5 \times 10^3} \times \left(\frac{100}{2}\right)^4 = 2/4 \times 10^{-6} \times \frac{10^8}{16} = \dots$

۴۳- **راهنمایی:** در قسمت‌های «ب» و «ج» هر دو عدد را به صورت نماد علمی (یا اعشاری) بنویسید.

۴۴- **راهنمایی:** در هر دو قسمت، سه عدد را با نماد علمی نمایش داده و سپس مقایسه کنید. فقط مواظب باشید اشتباه نکنید.

۴۵- **راهنمایی:** باید قطر زمین را بر قطر هسته‌ی اتم تقسیم کنید، اما توجه داشته باشید این دو اندازه را با واحد یکسان (مثلاً متر) به کار ببرید. همان طور

که در صورت مسأله هم گفته شده است هر کیلومتر ۱۰۰۰ متر است، بنابراین ۱۲۷۳۶ کیلومتر برابر با متر است. هم‌چنین هر سانتی‌متر ۰/۰۱ متر است، بنابراین $9/95 \times 10^{-13}$ سانتی‌متر برابر با متر است.

۴۶- از نسبت تناسب مقابل، ضخامت هر برگ به دست می‌آید اما باید به ۲ نکته توجه داشته باشید: اولاً ۸۰۰ صفحه

تعداد برگ (ورق)	ضخامت
۴۰۰	۶/۲ (cm)
۱	x (cm)

برابر با ۴۰۰ برگ (ورق) است و باید حواستان به این نکته باشد.

ثانیاً در نسبت تناسب فوق، X برحسب سانتی‌متر به دست می‌آید ولی با توجه به خواسته‌ی مسأله باید جواب برحسب متر باشد. (هر سانتی‌متر ۰/۰۱ متر است).

* در این جا می‌توان مسائل ۱۰ و ۱۱ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۴۷- ۳/۲۶- **راهنمایی:** اگر عددی را به صورت $m \times 10^d$ بنویسیم به طوری که d عددی صحیح و m عددی اعشاری و $1 \leq m < 10$ باشد، آن گاه عدد

مذکور به صورت نماد علمی نوشته شده است.

ریشه‌گیری (ریشه‌های دوم و $\sqrt{\quad}$ / ریشه‌ی سوم و $\sqrt[3]{\quad}$)

۴۸- **راهنمایی:** تفاوتی بین $\sqrt[3]{a}$ و ریشه‌ی سوم a نیست، اما ریشه‌های دوم عدد مثبت a برابر با $\pm\sqrt{a}$ می‌باشد. (ضمناً یادتان باشد در \sqrt{a} باید a

نامنفی باشد و خود \sqrt{a} هم نامنفی است).

۴۹- چهار گزاره نادرست‌اند، از جمله قسمت‌های «الف» و «ط».

۵۰- الف) ۰ و ۱ (ب) ۰ و ۱ (ج) ۰

۵۱- عبارت همواره درست هستند.

* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۱۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۵۲- **راهنمایی:** در مورد علامت b نمی‌توان اظهار نظر کرد.

$$\text{الف) } \sqrt{(-3)^{16}} = \sqrt{\left((-3)^2\right)^8} = \left(\sqrt{(-3)^2}\right)^8 = \dots\dots$$

-۵۳

$$\text{ب) } (\sqrt{a})^6 = \left((\sqrt{a})^2\right)^3 = \dots\dots$$

$$\text{ج) } \sqrt{1 + \frac{y}{9}} = \sqrt{1 + \frac{y}{9}} = \dots\dots$$

$$\text{د) } \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3 = \dots\dots$$

$$\text{ه) } \sqrt{\frac{18 \cdot X^4}{5}} = \sqrt{\frac{18}{5}} \times \sqrt{X^4} = \dots\dots$$

جواب قسمت‌های «و» و «ز» برابر با $|x^3| \cdot y^2$ و $\frac{|a|}{35b^2}$ می‌باشند.

$$\text{د) } \pm \sqrt{0/0016} = \pm \sqrt{\frac{16}{10000}} = \dots\dots$$

-۵۴

$$\text{ه) } \pm \sqrt{2/25} = \pm \sqrt{225 \times 10^{-2}} = \dots\dots$$

$$\text{و) } \pm \sqrt{7 + \frac{1}{9}} = \pm \sqrt{7 + \frac{1}{9}}$$

جواب قسمت «ز» برابر است با $\pm \frac{a}{a^6}$.

$$\text{ب) } \sqrt[3]{X^4 \cdot X^8} = \sqrt[3]{X^{12}} = \sqrt[3]{(X^3)^4} = \dots\dots$$

-۵۵

$$\text{ه) } \sqrt[3]{-0/125} = -\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \dots\dots$$

$$\text{و) } \sqrt[3]{(0/008)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}\right)^2 = \dots\dots$$

$$\text{ط) } \sqrt[3]{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^6 + 4^6}} = \sqrt[3]{\frac{2^{30} + 2^{20}}{2^{18} + 2^8}} = \dots\dots$$

در ادامه‌ی حل قسمت «ط» در صورت از 2^{20} و در مخرج از 2^8 فاکتور بگیرید. جواب‌های قسمت «ط» و «ز» به ترتیب ۱۶ و $1/5$ به دست می‌آیند.

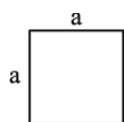
* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۱۵ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

$$\text{ه) } \sqrt[3]{0/064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \dots\dots$$

-۵۶

$$\text{و) } \sqrt[3]{3 + \frac{3}{8}} = \sqrt[3]{3 + \frac{3}{8}} = \dots\dots$$

$$\text{ط) } \sqrt[3]{\left(\frac{3^3}{a^6}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{3^3}{a^6}}\right)^2 = \dots\dots$$

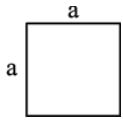


۵۷- راهنمایی: فرض کنید مربعی به ضلع a متر دارای مساحت یک هکتار (ده هزار مترمربع) باشد، بنابراین $a^2 = 10000$. حال

باید a را به دست آورید. [توجه کنید که a باید عددی مثبت باشد. (چرا؟)]

۵۸- راهنمایی: حجم هر کالا $\frac{1}{8}$ مترمکعب است.

۵۹- ۴^۲ و ۸^۲



راهنمایی: فرض کنید مربعی به ضلع a سانتی‌متر دارای مساحت $۳^۸$ سانتی‌متر مربع باشد، بنابراین $a^۲ = ۳^۸$. حال باید a را به دست آورید. [توجه کنید که a باید مثبت باشد. (چرا؟)]
بعد از به دست آوردن طول هر ضلع، محیط مربع $(۴a)$ به دست می‌آید و کافی است این محیط به دست آمده را یک بار با پایه‌ی ۴ و بار دیگر با توان ۲ بنویسید.

* در این جا می‌توان مسائل ۱۲ و ۱۳ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

$$\left. \begin{matrix} ab^۲ = ۶ \\ ba^۲ = ۴/۵ \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\times} a^۳b^۳ = \dots \Rightarrow (ab)^۳ = \dots \Rightarrow ab = \dots \quad (۶۰- الف)$$

$$a = \frac{a^۲b}{ab} = \dots, \quad b = \frac{ab^۲}{ab} = \dots \quad (ب)$$

۶۱- ۱۶

* در این جا می‌توان مسائل ۱۶ و ۱۸ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

$$\sqrt{a} = ۲^۳ \times ۳^۲ \Rightarrow a = (۲^۳ \times ۳^۲)^۲ = ۲^۶ \times ۳^۴ \quad (۶۲- الف)$$

$$\sqrt[۳]{b} = ۲^۴ \times ۳^۲ \Rightarrow b = (۲^۴ \times ۳^۲)^۳ = ۲^{۱۲} \times ۳^۶$$

بقیه‌ی قسمت‌ها را خودتان حل کنید.

از مقایسه‌ی جواب‌های «ج» و «د» نتیجه می‌شود $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (البته با توجه به مثبت بودن a و b) و همچنین $\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a} \cdot \sqrt[۳]{b}$

۶۳- جواب‌ها به صورت درهم:

$$\frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵, \quad \frac{۷}{۲۰} = ۰/۳۵, \quad -۰/۲, \quad ۹, \quad ۱۲, \quad ۲۵, \quad -۴\sqrt{۳}, \quad ۶\sqrt{۲}a^۲, |b|, \quad -\frac{۴a^۲}{b}, \quad a\sqrt[۳]{a}$$

۶۴-

ب) $\sqrt{۰/۱۶x^۵} = \sqrt{۰/۱۶} \times \sqrt{x^۵} = \sqrt{\frac{۱۶}{۱۰۰}} \times \sqrt{x^۴} \times \sqrt{x} = \dots$

ج) $\sqrt{۱۴\frac{۲}{۹}} = \sqrt{۱۴ + \frac{۲}{۹}} = \dots$

ه) $\sqrt[۳]{-۰/۲۴۳} = -\sqrt[۳]{\frac{۲۴۳}{۱۰۰۰}} = -\sqrt[۳]{\frac{۳^۵}{۱۰^۳}} = \dots$

ز) $\sqrt[۳]{۱۰\frac{۱}{۸}} = \sqrt[۳]{۱۰ + \frac{۱}{۸}} = \dots$

جواب قسمت‌های «د»، «و» و «ج» برابر با $\frac{۵a^۲\sqrt{b}}{۲|c|}$ ، $۱۶a\sqrt[۳]{a}$ و $\frac{-۵b\sqrt[۳]{c^۲}}{a}$ می‌باشند. ضمناً بد نیست بدانید $۲^۷ = ۱۲۸$. (در قسمت «ج» به

دردتان می‌خورد.)

گویا کردن مخرج کسر

۶۶- جواب‌ها به صورت درهم:

$$۲\sqrt[۳]{۳}, \quad \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad \frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}, \quad -\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{۴}, \quad -\frac{\sqrt{۶}}{۶}, \quad \frac{\sqrt[۳]{۳۶}}{۹}, \quad \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}, \quad \sqrt{x^۲+۱}, \quad -\frac{\sqrt[۳]{۲a^۲}}{۲a^۲}, \quad -\frac{\sqrt{۲a}}{a^۲}, \quad \frac{\sqrt[۳]{۱۰ab^۲}}{۳abc}$$

* در این جا می‌توان مسأله‌ی ۱۷ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.


جمع و تفریق رادیکال‌ها

۶۸- جواب‌ها به صورت درهم:

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt[3]{3}, 7, 2, 1, 0, -1, -0.75$$

* در این جا می‌توان مسائل ۱۹ و ۲۰ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

 ۶۹- الف) **راهنمایی:** نشان دهید طرفین تساوی برابر با $\frac{\sqrt{10}}{10}$ یا $\sqrt{0.1}$ هستند.

 ب) **راهنمایی:** نشان دهید طرفین تساوی برابر با $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ هستند.

۷۰- ۱۰، ۱۶ و ۴۸

 ۷۱- **راهنمایی:** در یکی از جاهای خالی عدد صفر و در یک جای خالی دیگر عددی منفی قرار می‌گیرد.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt[3]{6}}{6}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$



تمرینات ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش

۱- فرض کنیم جرم این ماده‌ی رادیواکتیو پس از T دقیقه، نصف شود. اگر جرم اولیه‌ی این ماده را m فرض کنیم، داریم:

مدت زمان	°	T	$2T$	$3T$
جرم	m	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{4}$	$\frac{m}{8}$

همان‌طور که در جدول دیده می‌شود، پس از طی $2T$ دقیقه، جرم ماده $\frac{1}{4}$ جرم اولیه‌اش می‌شود، بنابراین:

$$2T = 80' \Rightarrow T = 40 \text{ دقیقه}$$

باز هم طبق جدول بالا، جرم ماده پس از طی مدت $3T$ (یعنی 120 دقیقه)، $\frac{1}{8}$ مقدار اولیه‌اش می‌شود.

توجه: با این‌گونه از مسائل در کتاب درسی ریاضی ۲ فصل ۴ (توابع نمایی و لگاریتمی) بیشتر آشنا می‌شوید، البته به شرطی که فصل ۳ ریاضی ۱ را به خوبی فراگرفته باشید. (یک احتمال دیگر هم آن است که سال بعد رشته‌ی انسانی را انتخاب کنید و هرگز سر و کارتان با کتاب ریاضی ۲ نیفتد!)

۲- جواب‌ها به صورت درهم:

$$x^3, \left(\frac{5}{3}\right)^2, 35, 32, 33, 61, 629, 6012, 2^{2008} = 4^{1004} = 16^{502} = 256^{251}$$

$$3- 3^{100} \text{ (یا } 9^{50} \text{ یا } 81^{25})$$

$$4- \text{الف) } 2^{27} \text{ ب) } 2^{31}, 2^{30} \text{ و } 2^{46}$$

۵- الف) $B = 8A$ [راه‌نمایی: A و B را با پایه‌ی یکسان بنویسید.]

ب) $B = A^2$ [راه‌نمایی: A و B را با توان یکسان بنویسید.]

$$6- \text{الف) } \frac{4a^2}{27b} \text{ [راه‌نمایی: } 9 = 3^2 \text{ و } 12 = 2^2 \times 3 \text{]}]$$

ب) $a = 1$ و $b = -1$ [راه‌نمایی: نشان دهید طرف چپ تساوی، برابر است با $2^2a \times 3^{-2b}$]

$$\text{ج) } a^{-3} \text{ [راه‌نمایی: } 27 = 3^3 \text{ و } 9 = 3^2 \text{]}]$$

۷- x در قسمت‌های مختلف این تمرین اعداد ۱، ۲، ۳ و ۱۵ به دست می‌آید.

راه‌نمایی: در قسمت «ج» از 7^x و در قسمت «د» از 3^x فاکتور بگیرید.

نکته: برای حل معادلات توانی در این تمرین، باید طرفین معادله را با پایه‌ی یکسان بنویسید. در این صورت می‌توانید توان‌ها را برابر قرار دهید.

[مشروط بر آن‌که پایه‌ها عددی غیر یک باشد. (چرا؟)]

$$8- \text{ب) } 2^n \text{ ج) بله، } 2^0 = 1 \text{ [به عبارت دیگر در قسمت «ب»، داریم } n \in \mathbb{W} \text{]}]$$

۹- الف) ۸ [راه‌نمایی: از پاسخ قسمت «ب» تمرین قبل استفاده کنید.]

ب) ۵ [راه‌نمایی: باید معادله‌ی توانی $2^k - 2^{k-2} = 24$ را حل کنید.]

$$10- 10^8 \times \frac{2}{97} \text{ متر بر ثانیه [راه‌نمایی: فاصله‌ی خورشید تا زمین (برحسب متر) = سرعت نور (برحسب متر بر ثانیه) \times مدت زمان طی کردن فاصله (برحسب ثانیه)]}$$

$$11- \text{الف) } 10^4 \text{ [راه‌نمایی: مساحت مربع به ضلع ۱ متر = مساحت مربع به ضلع } 10^2 \text{ سانتی‌متر]}]$$

ب) 10^{-6} [راه‌نمایی: حجم مکعب به ضلع ۱ سانتی‌متر = حجم مکعب به ضلع 10^{-1} متر]

$$\text{ج) } 10^3 \text{ [راه‌نمایی: } 1 \text{ (lit) = } 10^3 \text{ (cc) و } 1 \text{ (m}^3 \text{) = } 10^6 \text{ (cc)} \text{]}]$$

۱۲- 2^{-1} متر [راه‌نمایی: ابتدا حجم آکواریوم را برحسب متر مکعب بنویسید. برای این کار می‌توانید از تمرین قبل کمک بگیرید.]

۱۳- 2^0 متر [راه‌نمایی: ابتدا مشخص کنید $1/13$ تن برابر با چند گرم است. سپس مساحت را به دست آورید. با توجه به آن‌که ابعاد زمین برحسب متر

اعداد طبیعی‌اند، خواهید دید که محیط 2^0 یا 52 متر خواهد بود.]

۱۴- [راهنمایی:] می‌دانیم $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، $\sqrt[3]{-a^3} = -a$ و $\sqrt{a^2} = |a|$ از طرفی اگر $a > 0$ ، آن‌گاه $|a| = a$ و اگر $a < 0$ ، آن‌گاه $|a| = -a$. در این مسأله داریم $x = \sqrt{2} - 1 > 0$ و $x = \sqrt{2} - 2 < 0$ $[x - 1 = \sqrt{2} - 2 < 0]$

۱۵- [راهنمایی:] نشان دهید هر سه عبارت، برابر با $\frac{1}{9}$ هستند.

۱۶- [راهنمایی:] $a = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2$ و $b = \sqrt[3]{4} \Rightarrow b^3 = 4$ [و البته بدیهی است که $2^2 = 4$. حله؟]

۱۷- الف) توجه: در آخر راه حل به $a = x^6 = y^6$ می‌رسید. وقتی $x^6 = y^6$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت $|x| = |y|$ یا به عبارت دیگر $x = \pm y$. توضیح دهید چرا در این تمرین $x = y$ قابل قبول است ولی $x = -y$ قابل قبول نیست.

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

راهنمایی: ابتدا در عبارت‌های $2\sqrt{2}$ و $2\sqrt[3]{2}$ عدد ۲ را از پشت رادیکال‌ها به زیر آن‌ها ببرید (مشابه تمرین ۶۵ صفحه ۴۷ کتاب کار). به این ترتیب داریم $\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ حال از رابطه $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ استفاده کنید و ...

۱۸- [راهنمایی:] در قسمت «ح» می‌توانید طرفین وسطین کنید. [یا به عبارت دیگر دو عدد را در $(2^2 + 1)(2^4 + 1)$ ضرب کنید]. تنها نکته‌ای که باید حواستان به آن باشد، این است که $2^2 + 2^4 = 2 \times 2^2 = 2^3$. در سایر قسمت‌ها با توجه به مثبت بودن همه اعداد، می‌توان آن‌ها را به توان مناسب رسانده و اعداد به دست آمده را مقایسه کرد. [در قسمت‌های «الف»، «و» و «ز» همه اعداد را به توان ۲، در قسمت‌های «ب» و «ج» همه اعداد را به توان ۳ و در قسمت‌های «د» و «ه» همه اعداد را به توان ۶ برسانید].

اما روش دیگری هم برای حل قسمت‌های «الف» تا «ز» وجود دارد:

$$\text{الف) } \frac{5}{3} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} \text{ و } \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{9}} \Rightarrow \dots$$

$$\text{ب) } \frac{3}{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{8}} \text{ و } \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{24}{8}} \Rightarrow \dots$$

$$\text{ج) } \frac{5}{4} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{64}} \text{ و } \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}} \Rightarrow$$

$$\text{و) } \frac{3}{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ و } \frac{4}{3} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}} \text{ و } \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{\frac{18}{9}} \Rightarrow$$

$$\text{ز) } 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \text{ و } 4\sqrt{3} = \sqrt{48} \text{ و } 7 = \sqrt{49} \Rightarrow \dots$$

برای حل قسمت‌های «د» و «ه» هم می‌توان روش دیگری را به کار برد. البته باید نیم‌نگاهی به تمرین قبل داشته باشیم و بدانیم $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$. داریم:

$$\text{د) } \sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{8}} \text{ و } \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \dots$$

$$\text{ه) } \sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{8}} \text{ و } \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \Rightarrow \dots$$

۱۹- الف) ۳۲ [راهنمایی:] $0/027 = 27 \times 10^{-4}$ و $0/064 = 64 \times 10^{-3}$ و به همین ترتیب برای بقیه اعداد

ب) ۶ [راهنمایی:] می‌دانیم $\frac{x+y+z}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a}$. از این رابطه در زیر رادیکال می‌توان استفاده کرد.

ج) $\sqrt[3]{4-2a}$ [راهنمایی:] ابتدا در زیر رادیکال‌ها از ۸ و ۲۷ فاکتور بگیرید و ...

د) $\sqrt{6}$

$$\text{ه) } \frac{24\sqrt{5}}{5} \text{ [راهنمایی:] } \frac{1}{5} = 0/2$$

$$\text{و) } \frac{26\sqrt[3]{2}}{5} \text{ [راهنمایی:] } 0/016 = 0/008 \times 2$$

۲۰- [راهنمایی:] ابتدا $\sqrt{a} + \sqrt{a^5} - \sqrt{4a^3}$ را حتی‌الامکان ساده کنید. به دو نکته باید توجه داشته باشید: اولاً چون a نامنفی است پس

$$|a| = \sqrt{a^2} \text{ . ثانیاً در فصل بعد با اتحاد مربع دوجمله‌ای آشنا می‌شوید و خواهید دید } a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$