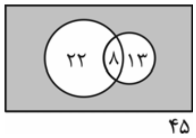
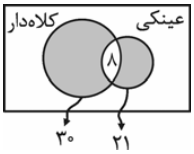
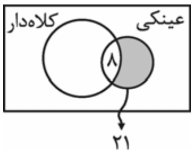
# جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۲

## مدل‌سازی و مسأله‌ی گروه‌ها

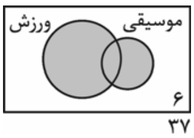
**۱-** ۱۳، ۳۵ و ۲

ج) 

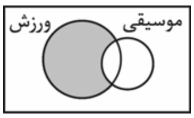

ب) 


الف) 

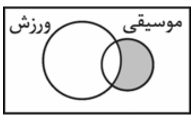

**۳-**

الف) 

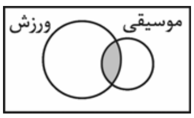
→ ۳۷ - ۶ = ۳۱

ب) 

→ قسمت «الف» منهای تعداد علاقه‌مندان به موسیقی

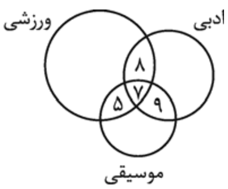
ج) 

→ قسمت «الف» منهای تعداد علاقه‌مندان به ورزش

د) 

→ [ج + ب] - الف

**۴-** ۶۴ نفر [**راهنمایی:** نمودار مقابل را تکمیل کنید.]




* در این‌جا می‌توان مسائل ۱ و ۲ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

## مفهوم مجموعه

**۵- راهنمایی:** توجه کنید که کلماتی مثل تیزهوش، تکنیکی، فقیر، بلندقد یا سنگین وزن تعریف دقیق و مشخصی ندارند مگر آن‌که معیار به‌طور مشخص بیان شود مثلاً سنگین‌تر از ۱۰۰ کیلو یا بلندقدتر از ۲۱۰ سانتی‌متر. (ضمناً به قسمت «ز» توجه خاصی داشته باشید. فکر می‌کنید این قسمت، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟)

**۶-** ۴، ۷ و بی‌شمار عضو

## عضویت ($\in$)- مجموعه‌های خاص (معروف) اعداد

**۷- توجه:** در مورد قسمت «ب» دقت به خرج دهید. بد نیست که با سایر دوستان یا دبیرتان در این مورد بحث و مشورت کنید.

**۸-** سه مورد غلط

**۹-** الف) **راهنمایی:** باید یک عدد گویای غیرصحیح مثال بزنید.

ب) **راهنمایی:** نگاهی به قسمت «ب» تمرین ۸ فصل قبل در همین کتاب بیندازید.

**۱۰-** **راهنمایی:** در بین گزینه‌ها، دو عدد صحیح وجود دارد که یکی از آن‌ها مثبت و دیگری نامثبت است. (ضمناً دو گزینه‌ی دیگر دو عدد نامثبت ولی غیرصحیح می‌باشند.)

## مجموعه‌ی تهی

**۱۱-** شش مجموعه‌ی تهی و چهار مجموعه‌ی غیرتهی

**پرسش**: تعداد اعضای مجموعه‌های ناتهی در تمرین فوق را تعیین کنید. [**پاسخ**: سه مجموعه‌ی تک عضوی و یک مجموعه با بی‌شمار عضو]

**پرسش**: اگر در قسمت «ط» به جای اعداد طبیعی، اعداد حقیقی مثبت را جایگزین می‌کردیم، آیا در جواب تغییری حاصل می‌شد؟ با مثال توضیح دهید.

**پرسش**: در قسمت «ه» آیا «مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامنفی» با «مجموعه‌ی اعداد طبیعی» تفاوتی دارد؟

**۱۲-** $\{\varnothing\}$ دارای یک عضو است ولی $\varnothing$ فاقد عضو است.

## تساوی مجموعه‌ها

**۱۴-** الف) **راهنمایی:** تکرار اعضا و هم‌چنین ترتیب آن‌ها در مجموعه اهمیتی ندارد.

ج) **توجه:** «یـ» و «ی» یک حرف محسوب می‌شوند.

**۱۵-** زوج مرتب $(a,b)$ در قسمت‌های مختلف عبارت‌اند از:

$(۶,۳),(-۵,۳),(۰,-۵),(۱,-۲),(-۲,۸)$

د) **راهنمایی:** $a+۲b=۱=\frac{b}{۳}$

ه) **راهنمایی:** $a^۲$ نمی‌تواند برابر با ۳- باشد. (چرا؟)

## زیرمجموعه

**۱۶-** سه مورد درست است.

**۱۷-** سه مورد درست است.

**۱۸-** **راهنمایی:** اگر به نمودارهای ون در تمرین‌های قبل (۱۶ و ۱۷) نگاهی بیندازید، می‌توانید نمودارهای ون لازم در این تمرین را در آن‌ها بیابید. (معرفی مجموعه با اعضا، برعهده‌ی خودتان)

**۱۹-** جواب یک قسمت «بله» و جواب قسمت دیگر «خیر» است.

[**راهنمایی:** مجموعه‌ی $A$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $B$ است هرگاه هر عضو $A$، عضوی از $B$ باشد.]

در قسمت «الف» باید به این پرسش پاسخ دهید که: آیا هر عدد طبیعی مضرب ۴، یک عدد صحیح زوج است؟

در قسمت «ب» باید به این پرسش پاسخ دهید که: آیا هر عدد اول ، یک عدد طبیعی فرد است؟

**۲۰-** چهار مورد درست است. [**توجه:** در مورد قسمت‌های «الف»، «ب» و «ط» خوب دقت کنید تا دچار اشتباه نشوید، به‌ویژه در مورد قسمت «ب».]

**۲۱-** **راهنمایی:** برگردید به «راهنمایی» که در پاسخ تمرین ۱۹ به آن اشاره کردیم.

**۲۲-** الف) **راهنمایی:** تعریف زیرمجموعه همان بود که در راهنمایی پاسخ تمرین ۱۹ به آن اشاره کردیم. در واقع باید به این سؤال خنده‌دار پاسخ دهید که: آیا هر عضو مجموعه‌ی $A$، عضوی از $A$ است؟! (ضمناً قسمت «ج» تمرین بعد یعنی ۲۳ هم به همین نکته اشاره دارد.) اما در مورد این سؤال که چه مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست، بهتر است به قسمت «ب» تمرین بعد یک نگاهی بیندازید. (عجب راهنمایی بزرگی! خود جواب!)

ب) خیر، یک استثنا وجود دارد. [**راهنمایی:** می‌دانیم برای هر مجموعه‌ی $A$ داریم $\varnothing \subset A$ و $A \subset A$. اما اگر $A=\varnothing$ باشد، این دو عبارت یکی می‌شوند یعنی هر دو به $\varnothing \subset \varnothing$ تبدیل می‌شوند.]

**۲۳-** دو مورد الزاماً درست نیستند. [**راهنمایی:** به توضیحاتی که برای تمرین قبل نوشتیم، نگاهی بیندازید.]

**۲۴- روش اول**: طبق تعریف زیرمجموعه، باید هر عضو $A$، عضو $\varnothing$ نیز باشد. نتیجه می‌گیریم که ....

**روش دوم**: برای هر مجموعه‌ی دلخواه $A$ داریم $\varnothing \subset A$. حال اگر $A \subset \varnothing$ باشد، طبق تمرین ۲۱ نتیجه می‌گیریم که ....

**۲۵-** الف) **راهنمایی:** مجموعه‌ی $A$ یک مجموعه‌ی سه عضوی است. باید ۸ زیرمجموعه برای آن بنویسید که شامل ۳ مجموعه‌ی یک عضوی، ۳ مجموعه‌ی دو عضوی، یک مجموعه‌ی ۳ عضوی و یک مجموعه‌ی بدون عضو (صفر عضوی) می‌باشند.

ب) **راهنمایی:** مجموعه‌ی $B$ یک مجموعه‌ی تک عضوی است و دارای ۲ زیرمجموعه می‌باشد.

ج) **راهنمایی:** مجموعه‌ی $C$ نیز تک عضوی است ($C = \{\varnothing\}$) و دارای ۲ زیرمجموعه می‌باشد.

**توجه:** مجموعه‌ی یک عضوی $A$ دارای دو زیرمجموعه‌ی $\varnothing$ و $A$ است.

د) **راهنمایی:** این مجموعه یک مجموعه‌ی دو عضوی است. باید ۴ زیرمجموعه برای آن بیابید که شامل ۲ مجموعه‌ی یک عضوی، یک مجموعه‌ی ۲ عضوی و یک مجموعه‌ی بدون عضو (صفر عضوی) می‌باشند.

ه) **راهنمایی:** مشابه قسمت «د». [جواب: $\underset{\text{بدون عضو (صفر عضوی)}}{\underset{\downarrow}{\varnothing}}$ و $\underbrace{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}_{\text{دو عضوی}}$ و $\underbrace{\{\{\varnothing\}\}}_{\text{یک عضوی}}$ و $\underbrace{\{\varnothing\}}_{\text{یک عضوی}}$] برای درک بهتر پاسخ قسمت «ه» بهتر است زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $D$ (قسمت «د») را بنویسید و سپس در آن به جای همه‌ی $a$ها، $\{\varnothing\}$ را جایگزین کنید.

**۲۶-** سه عضو و هشت زیرمجموعه:

اعضا: $\{a\} \in A \,،\, b \in A \,،\, \{a,b\} \in A$

زیرمجموعه‌ها: $\{\{a\},b,\{a,b\}\} \subset A, \{\{a\},b\} \subset A, \{b,\{a,b\}\} \subset A, \{\{a\},\{a,b\}\} \subset A, \{\{a\}\} \subset A, \{b\} \subset A, \{\{a,b\}\} \subset A, \varnothing \subset A$

**توجه:** همان‌طور که دیدید ۲ تا از اعضای مجموعه‌ی $A$، خودشان مجموعه بودند (یعنی $\{a,b\},\{b\}$). در کتاب درسی ریاضی ۱ به این‌گونه مجموعه‌ها اشاره‌ای نشده است و ظاهراً $\{\varnothing\}$ تنها مجموعه‌ای از این دست است که مؤلفان و برنامه‌ریزان کتاب درسی به آن اشاره کرده‌اند. با این حال از آن‌جا که معمولاً در آموزش مبحث مجموعه‌ها به این‌گونه مجموعه‌ها هم می‌پردازند، ما هم اشاره‌ای گذرا به آن کردیم.

❋ در این‌جا می‌توان مسائل ۳ و ۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۲۷-** ب) **راهنمایی:** ۳ مجموعه با این شرایط وجود دارد. (زیرمجموعه‌های ناتهیِ $\{۸،۹\}$)

ج) **راهنمایی:** ۳ مجموعه با این شرایط وجود دارد. (زیرمجموعه‌های دو عضویِ $\{۳،۶،۹\}$)

**۲۸-** الف) **راهنمایی:** ۴ مجموعه با این شرایط وجود دارد.

**پرسش**: تمام ۴ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $\{b,d\}$ را بنویسید. سپس در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، $a$ را داخل کنید. در نهایت ۴ مجموعه‌ی به‌دست آمده را با پاسخ قسمت «الف» تمرین ۲۸ مقایسه کنید.

ب) **راهنمایی:** ۴ مجموعه با این شرایط وجود دارد.

**پرسش**: تمام ۴ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $\{a,c\}$ را بنویسید. سپس در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، $d$ و $b$ را داخل کنید. در نهایت ۴ مجموعه‌ی به‌دست آمده را با پاسخ قسمت «ب» تمرین ۲۸ مقایسه کنید.

ج) **راهنمایی:** ۶ زیرمجموعه با این شرایط وجود دارد.

**۲۹- راهنمایی:** ۴ مجموعه با شرایط مذکور وجود دارد.

**پرسش**: تمام ۴ زیرمجموعه‌ی $\{۰،۲\}$ را بنویسید. سپس در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، ۱ را داخل کنید. در نهایت ۴ مجموعه‌ی حاصل را با پاسخ تمرین ۲۹ مقایسه کنید.

## اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها

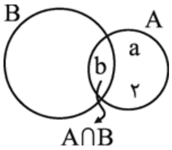
**۳۰-** ج) **راهنمایی:** باید عضوی از $C$ را بیابید که هم نام کوچکش ۳ حرفی و هم نام خانوادگیش ۵ حرفی باشد. [اشتراک قسمت‌های «الف» و «ب»]

د) **راهنمایی:** باید اعضایی از $C$ را مشخص کنید که نام کوچکشان ۳ حرفی یا نام‌خانوادگی آن‌ها ۵ حرفی (یا هر دو) باشند. [اجتماع قسمت‌های «الف» و «ب»]

ه) **راهنمایی:** باید عضوی از $C$ را بیابید که نه نام کوچکش ۳ حرفی و نه نام خانوادگیش ۵ حرفی باشد. [عضوی از $C$ که از اعضای قسمت «د» نیست.]

**۳۱-** با توجه به $A=\{۲،۳،۵،۷\}$ و $B=\{۵،۶،۷،۸،۹\}$ تمرین را حل کنید.

* بعد از تمرین ۳۲ می‌توان مسائل ۵ و ۶ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.




**۳۳- راهنمایی:** در نمودار ون مقابل، ابتدا $A\cap B=\{b\}$ و سپس $A=\{a،b،۲\}$ را مشخص می‌کنیم:

حال کافی است با استفاده از $A\cup B=\{a،b،c،۱،۲\}$ نمودار را تکمیل کرده و در نهایت $B$ را مشخص کنیم.

**۳۴- راهنمایی:** اگر به راهنمایی نوشته شده در صورت سؤال توجه کنید، معلوم می‌شود که باید زیر مجموعه‌های $\{۱،۲،۳،۴\}$ که شامل ۳ و ۲ هستند را بیابیم:

$\{۲،۳\}،\{۲،۳،۱\}،\{۲،۳،۴\}،\{۲،۳،۱،۴\}$

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۷ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۳۵- راهنمایی:** از قسمت «الف» تمرین ۳۲ می‌دانیم $A\subset(A\cup B)$ و $B\subset(A\cup B)$، بنابراین در این تمرین $A\subset\varnothing$ و $B\subset\varnothing$ می‌باشند. حال نگاهی به تمرین ۲۴ بیندازید.

**۳۶- راهنمایی:** از قسمت‌های «الف» و «ب» تمرین ۳۲ می‌دانیم $A\subset(A\cup B)$ و $(A\cap B)\subset A$. حال در این تمرین داریم $A\cap B=A\cup B$، بنابراین:

$$\begin{cases} A\subset(A\cup B) \xrightarrow{A\cup B=A\cap B} A\subset(A\cap B) \\ (A\cap B)\subset A \Longrightarrow (A\cap B)\subset A \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۲۱}} ....$$

اگر برای مجموعه‌ی $B$ نیز به همین ترتیب عمل کنیم، می‌توان نشان داد مجموعه‌های $A$، $B$، $A\cap B$ و $A\cup B$ برابرند.

**۳۸-** جواب یکی از ۸ جای خالی، $\varnothing$ است.

ه) **روش اول**: جواب این قسمت را به کمک قسمت «ب» $(A\cup\varnothing)$ و قسمت «الف» $(A\cap A)$ به دست آورید.

**روش دوم**: جواب را به کمک قسمت «ج» به‌دست آورید. (با فرض $B=\varnothing$)

و) **روش اول**: جواب این قسمت را به کمک قسمت «ب» ($A\cap\varnothing$ و $A\cup\varnothing$) به‌دست آورید.

**روش دوم**: جواب را به کمک قسمت «د» به‌دست آورید. (با فرض $B=\varnothing$)

**۳۹- راهنمایی:** در هر قسمت باید تعیین کنید $A\subset B$ است یا $B\subset A$. در قسمت «ج» پس از تعیین این موضوع، تعیین کنید $A\cap B$ برابر با چه مجموعه‌ای است.

**۴۰-** الف) **راهنمایی:** کافی است $B$ و $C$ دو مجموعه‌ی متمایز ولی هر دو زیرمجموعه‌ی $A$ باشند. در این صورت $A\cup B=A\cup C=A$ خواهد بود. (البته حالات دیگری هم وجود دارد. به‌عنوان تمرین، نمودار ون قسمت «الف» را با شرط $B،C\not\subset A$ رسم کنید.)

ب) **راهنمایی:** کافی است $B$ و $C$ دو مجموعه‌ی متمایز و هر دو جدا از $A$ باشند. در این صورت $A\cap B=A\cap C=\varnothing$ خواهد بود. (البته حالات دیگری هم وجود دارد. به‌عنوان تمرین، نمودار ون قسمت «ب» را با شرط $A\cap B=A\cap C=\varnothing$ رسم کنید.)

ج) **راهنمایی:** $B$ با هر یک از $A$ و $C$ دارای اشتراک است ولی $A$ و $C$ جدا از هم هستند.

د) **راهنمایی:** $A$ و $B$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند که ضمناً $A\cup B$ زیرمجموعه‌ی $C$ است.

**۴۱- توجه:** پاسخ‌های دو قسمت «ج» و «د» را با هم مقایسه کنید.

**۴۲-** حل قسمت «د» (به‌عنوان نمونه):

$$A\cap(B\cup C)=\{۱،۲،۳،۴\}\cap\{۲،۳،۴،۵،۶\}=\{۲،۳،۴\}$$

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{۳،۴\}\cup\{۲،۳\}=\{۲،۳،۴\}$$

* در این‌جا می‌توان مسائل ۸، ۹ و ۱۰ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۴۳-** سه مورد درست است. در این‌جا به یکی از موارد نادرست اشاره می‌کنیم: قسمت «د» نادرست است زیرا $\mathbb{R}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ است و $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}$ نیست بلکه $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ است. [به عنوان تمرین، تمام قسمت‌های نادرست را درست کنید.]

**۴۴- توجه:** قسمت «د» را پس از آموختن «تفاضل مجموعه‌ها» پاسخ دهید.

[جواب «د»: $\mathbb{Z}-\{۰\}$]. جواب سایر قسمت‌ها عبارتند از: $\mathbb{W}$ و $\mathbb{N}$ (یا $A$ و $C$)، $\mathbb{Z}$ و $\varnothing$.

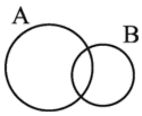
**۴۵-** در دو قسمت، مجموعه‌ها جدا از هم هستند. [**راهنمایی:** مجموعه‌ی $B$ در قسمت‌های «الف» و «ب» به ترتیب $\{۰\}$ و $\{-۱،۱۰\}$ است. در مورد پاسخ قسمت «ج» هم ابتدا به این سؤال پاسخ دهید که آیا عددی وجود دارد که هم گویا و هم گنگ باشد.]

**پرسش:** اگر $A=\varnothing$ بوده و $B$ مجموعه‌ای دلخواه باشد، می‌دانیم $A\cap B=\varnothing$. آیا می‌توان گفت که $A$ و $B$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند؟

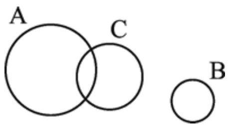
**پاسخ:** خیر (به تعریف دو مجموعه‌ی جدا از هم، در کتاب درسی مراجعه کنید. مجموعه‌های جدا از هم، تنها برای مجموعه‌های ناتهی تعریف می‌شود.)

**۴۶-** با توجه به شکل‌های مقابل، به سؤال‌ها پاسخ دهید.

الف)




ب)




## تفاضل مجموعه‌ها

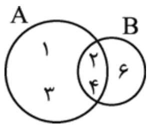
**۴۷-** ورزشکاران آسیایی، آسیایی‌های غیرورزشکار و ورزشکاران غیرآسیایی

**۴۸- توجه:** پیش از هر چیز اعضای تکراری مجموعه‌های $A$ و $B$ را دور بزنید (فقط یکی از هر عضو تکراری را نگه دارید) تا دچار اشتباه نشوید.

$A=\{۱،۲،۳،۴\}$

$B=\{۲،۴،۶\}$

$\Rightarrow$




$\Rightarrow$ به پرسش‌ها پاسخ دهید.

[آیا پاسخ قسمت‌های «ب» و «ج» فقط برای این تمرین صادق‌اند یا این‌که حکم کلی هستند؟ با رسم نمودار ونِ کلّی تحقیق کنید.]

**۴۹- راهنمایی:** با توجه به $A=\{۲،۳،۵،۷\}$، $B=\{۲،۴،۶،۸\}$ و $C=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ به هر قسمت پاسخ دهید. جواب‌ها عبارتند از: $\varnothing$، $\{۸\}$ و $\{۱،۳،۵،۷\}$

**۵۰-** $\varnothing$، $\{d،g،e\}$ و $\{a،b،h،f\}$

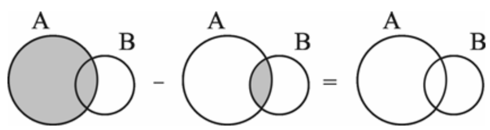
* در این‌جا می‌توانید مسأله‌ی ۱۱ بخش سخت‌کوش را مطرح کنید.

**۵۲- توجه:** دو گزینه را باید رسم کنید زیرا یکی از ۴ گزینه جواب است و دیگری تهی است، در نتیجه ۲ گزینه برای رسم باقی می‌ماند.

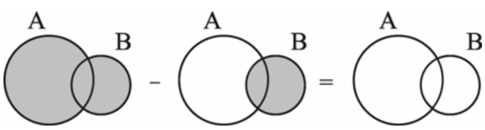
**۵۳-** الف) $(B-C)\cap A=(A\cap B)-C=(A-C)\cap B$

ب) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

**۵۴-** شکل‌ها و جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

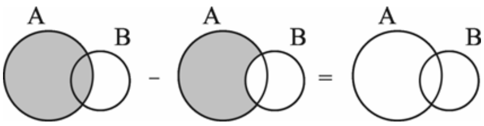



$A \quad - \quad (A\cap B) \quad = \quad .........$




$(A\cup B) \quad - \quad B \quad = \quad .........$

**۵۵-** شکل و جای خالی زیر را تکمیل کنید.




$A \quad - \quad (A - B) \quad = \quad .........$

**۵۶-** نیمی از موارد درست و نیم دیگر نادرست هستند.

* در این‌جا می‌توان مسائل ۱۲، ۱۳ و۱۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۵۷-** دو $\varnothing$ و یک $A$

**۵۸- روش اول**: می‌دانیم $A - B = A - (A \cap B)$، بنابراین در این تمرین داریم $A - (A \cap B) = A$. در نتیجه هیچ‌یک از اعضای $A \cap B$ در $A$ نیست و این بدان معناست که .........

**روش دوم**: طرفین $A - B = A$ را با $B$ اشتراک بگیرید، یعنی:

$A - B = A \Rightarrow (A - B) \cap B = A \cap B \Rightarrow .....$

**توجه:** در مسائل ۵۸ تا ۶۰ به کلمه‌ی «الزاماً» توجه شود.

**۵۹-** الف

**۶۰- راهنمایی:** از پاسخ تمرین قبل کمک بگیرید.

**پرسش**: اگر $A - B = B - A$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر الزاماً صحیح است؟

**الف)** $B \subset A$ **ب)** $A \subset B$ **ج)** $A = B$ **د)** $A = B = \varnothing$

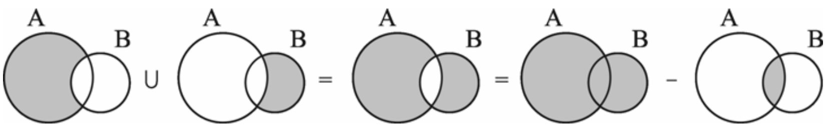
**پاسخ**: ج

**۶۱-** خیر، مثلاً حالتی را فرض کنید که $A \subset B \subset C$ و $B \neq C$ باشد، در این صورت $A - B = A - C = \varnothing$.

(البته حالات دیگری هم وجود دارد که $A - B = A - C$ بوده و $B \neq C$ باشد.)

**۶۲-** یک $B$ و دو $C$

**۶۳-** ب)




$(A - B) \quad \cup \quad (B - A) \qquad\qquad (A \cup B) \quad - \quad (A \cap B)$

در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۵ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۶۴-** $\varnothing$، $\{0\}$، $\mathbb{N}$ و مجموعه‌ی اعداد گنگ

**۶۵-** جواب‌ها عبارت‌اند از $B$، $C$، $\varnothing$، $\{0\}$ و $\{0\}$ و $\mathbb{Z} - \{0\}$

**پرسش**: در تمرین ۶۵ مشخص کنید هر یک از مجموعه‌های $A$، $B$، $C$ و $D$ برابر با کدام‌یک از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ است؟

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

**۶۶-** پنج مجموعه‌ی متناهی

**توجه:** یکی از ۵ مجموعه‌ی متناهی فوق «مجموعه‌ی اتم‌های موجود در هستی» است. به شخصه معتقدم هر چیز عینی که وجود خارجی دارد و امری انتزاعی یا قراردادی ذهنی نیست، قطعاً متناهی است. البته بعضی از دوستان با توجه به بحثی فیزیکی ـ فلسفی ـ تخیلی (!) معتقدند که «مجموعه‌ی اتم‌های هستی» ممکن است نامتناهی باشد. اگرچه من به هیچ‌وجه با این موضوع موافق نیستم اما بهتر است برای خلاص شدن از شرّ هرگونه شک و شبهه‌ای کلمه‌ی «هستی» را (در قسمت «س») به «کره‌ی زمین» تغییر دهید. و الله اعلم!

**۶۷ و ۶۹- راهنمایی:** وقتی مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی دیگری است، اگر مجموعه‌ی بزرگ‌تر متناهی باشد، مجموعه‌ی کوچک‌تر هم متناهی است و اگر مجموعه‌ی کوچک‌تر نامتناهی باشد، مجموعه‌ی بزرگ‌تر هم نامتناهی است.

**۷۰-** ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

د) مثلاً $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ (شما سعی کنید یک مثال دیگر بزنید.)

**توجه:** جواب قسمت «الف» مسلماً می‌تواند جواب قسمت «ج» هم باشد (چرا؟) ولی جواب قسمت «ج» ممکن است جواب قسمت «الف» نباشد، مثلاً مجموعه‌های $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ و $\mathbb{N}$.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۶ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

## مشخص کردن مجموعه‌ها

**۷۱-** الف) $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ د) $\{x \in \mathbb{W} \mid 4 < x^2 < 10\}$ ز) مجموعه‌ی اعداد مربع کامل حسابی

[در این تمرین مجموعه‌های اعداد طبیعی و گویا هم دیده می‌شوند.]

* در این‌جا می‌توان مسائل ۲۰ و ۱۷ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۷۲- راهنمایی:** مجموعه‌ی $A$ چهار عضوی، $B$ و $G$ سه عضوی، $C$ و $D$ دو عضوی و $F$ تک عضوی‌اند. در مورد مجموعه‌ی $E$ چه فکر می‌کنید؟

**۷۳-**

ه) $E=\left\{\frac{1}{2^k} \mid k\in\mathbb{W}, 0\le k\le 5\right\}=\left\{\frac{1}{2^{n-1}} \mid n\in\mathbb{N}, n<7\right\}$

و) $F=\left\{\frac{1}{2^n} \mid n\in\mathbb{N}, 2\le n\le 10\right\}=\left\{\frac{1}{(k+1)^2} \mid k\in\mathbb{N}, k<10\right\}$

ز) $G=\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

**۷۴-** ۱۲

**۷۵-** الف) هر دو مجموعه برابر با $\{\ldots,-5,0,5,10,\ldots\}$ هستند.

ب) هر دو مجموعه برابر با مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد هستند.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۸ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۷۶ - راهنمایی:** دو مجموعه نامتناهی‌اند (مثلاً $F$). مجموعه‌های متناهی دارای صفر، یک، دو و چهار عضو می‌باشند.

**۷۷-** $\{1,9\}$، $\{3,12\}$ و $\{1,3,9,12\}$

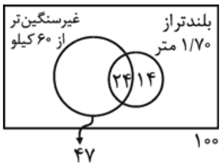
* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۹ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

**۷۸-** الف) **راهنمایی:** مجموعه‌ی $A$ سه عضوی و مجموعه‌ی $B$ دو عضوی می‌باشند.

ب) $\varnothing$

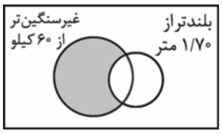
## تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش

**۱-** طبق اطلاعاتی که داریم، نمودار ون رسم می‌کنیم:




الف) **روش اول:** ابتدا ناحیه‌ی مورد نظر را در نمودار ون مشخص کرده و سپس مسأله را حل می‌کنیم:

درصد ۲۳ = ۲۴ - ۴۷ = جواب: طبق اطلاعات نمودار بالا $\Leftarrow$




$\leftarrow$ غیر سنگین از ۶۰ کیلو و غیر بلندتر از ۱/۷۰ متر

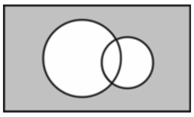
**روش دوم:**

درصد خانم‌های غیرسنگین‌تر از ۶۰ کیلو و بلندتر از ۱/۷۰ متر − درصد خانم‌های غیرسنگین‌تر از ۶۰ کیلو = درصد خانم‌های غیرسنگین‌تر از۶۰ کیلو و غیربلندتر از ۱/۷۰ متر

$= ۴۷\% - ۲۴\% = ۲۳\%$

ب) برعهده‌ی خودتان [جواب از روی نمودار ون اولیه، به راحتی معلوم می‌شود.]

ج) **روش اول:** ناحیه‌ی موردنظر را در نمودار ون مشخص کرده و مسأله را حل می‌کنیم:



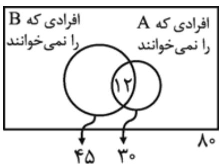
$\Rightarrow ۱۰۰ - (۲۳ + ۲۴ + ۱۴) = ۳۹\%$

**روش دوم:**

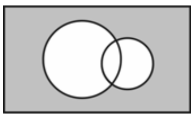
(درصد خانم‌های سنگین‌تر از ۶۰ کیلو و بلندتر از ۱/۷۰ متر + درصد خانم‌های غیرسنگین‌تر از ۶۰ کیلو) - $\underbrace{۱۰۰\%}_{\text{کل خانم‌ها}}$ = درصد خانم‌های سنگین‌تر از۶۰ کیلو و غیربلندتر از ۱/۷۰ متر

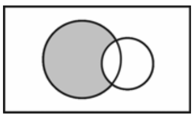
$= ۱۰۰\% - (۴۷\% + ۱۴\%) = ۳۹\%$

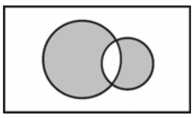
**۲-** با توجه به نمودار ون مقابل، مسأله را حل می‌کنیم.
جواب‌ها ۱۷، ۳۳، ۵۱ و ۶۸ هستند.

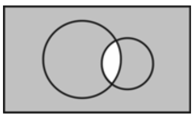



توجه کنید که اگر نواحی خواسته شده را در نمودار ون به درستی مشخص کنید، جواب هم به‌راحتی به‌دست می‌آید.

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

**توضیح:** تعداد افرادی که A را می‌خوانند برابر است با کل افراد منهای افرادی که A را نمی‌خوانند. اما تعداد افرادی که فقط A را می‌خوانند (یعنی A را می‌خوانند و B را نمی‌خوانند) برابر است با تعداد افرادی که B را نمی‌خوانند منهای تعداد افرادی که هیچ‌یک از A و B را نمی‌خوانند. [پاسخ قسمت «ب» به این ترتیب به‌دست می‌آید.]

به همین ترتیب تعداد افرادی که فقط B را می‌خوانند (یعنی B را می‌خوانند و A را نمی‌خوانند) برابر است با تعداد افرادی که A را نمی‌خوانند منهای تعداد افرادی که هیچ‌یک از A و B را نمی‌خوانند.

تعداد افرادی که دقیقاً یکی از A و B را می‌خوانند برابر است با تعداد افرادی که فقط A را می‌خوانند به‌علاوه‌ی تعداد افرادی که فقط B را می‌خوانند. [پاسخ قسمت «ج» به این ترتیب به‌دست می‌آید.]

**۳-** ب) مجموعه‌ی $B=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ دارای سه عضو $a$ و $\{a\}$ و $\{a,\{a\}\}$ می‌باشد و داریم:

$\{a\}\in\{a,\{a\}\}$ و $a\in\{a,\{a\}\}$ و $a\in\{a\}$

ج) مجموعه‌ی $C=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ دارای دو عضو $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ و چهار زیرمجموعه‌ی $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ و $\{\{\varnothing\}\}$ و $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ می‌باشد.

**پرسش**: یک مجموعه‌ی سه عضوی بسازید که هر عضو آن، زیرمجموعه‌ی آن هم باشد.

**پاسخ**: $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ یا $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

**پرسش**: آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هر زیرمجموعه‌اش، عضوی از آن هم باشد؟

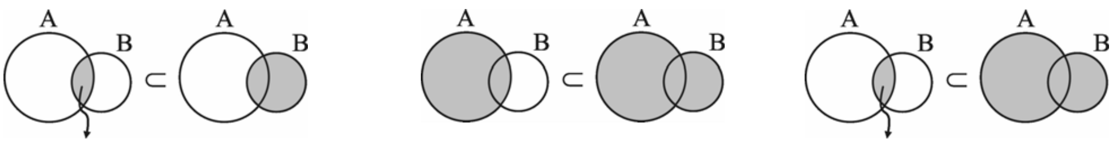
**پاسخ**: خیر. زیرا تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه، بیشتر از تعداد عضوهای آن مجموعه است.

**۴-** ابتدا مجموعه‌ی مذکور را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم:

$A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

این مجموعه ۳ عضو و ۸ زیرمجموعه دارد. [نوشتن آن‌ها برعهده‌ی خودتان.]

**۵- یادآوری**: طبق تعریف زیرمجموعه، مجموعه‌ی $A$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $B$ است هرگاه هر عضو $A$، عضوی از $B$ باشد. حال برای حل این مسأله، به این نکته توجه کنید که $(A\cap B)\subset B$، $A\subset(A\cup B)$ و $(A\cap B)\subset(A\cup B)$ می‌باشند.




$x\in(A\cap B)$ $x\in B$ $x\in A$ $x\in(A\cup B)$ $x\in(A\cap B)$ $x\in(A\cup B)$

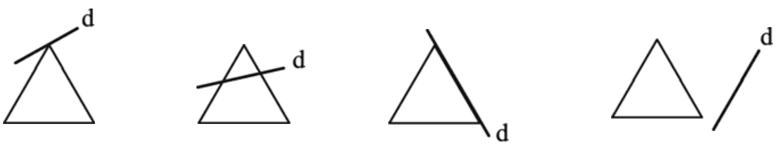
**۶-** تعداد اعضای $X$ و هم‌چنین تعداد اعضای $Y$ بی‌شمار است.

**نکته**: همواره تعداد اعضای $X\cup Y$ بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای $X$ (و هم‌چنین تعداد اعضای $Y$) است.

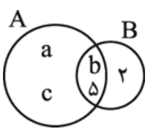
**نکته**: همواره تعداد اعضای $X\cap Y$ کوچک‌تر یا مساوی تعداد اعضای $X$ (و هم‌چنین تعداد اعضای $Y$) است.

در این مسأله تشخیص این‌که $X\cup Y$ چه تعداد عضو دارد، ساده است. [برعهده‌ی خودتان]

برای تشخیص این که تعداد اعضای $X\cap Y$ چه مقادیری می‌تواند باشد، به شکل‌های زیر توجه کنید:




**۷- راهنمایی**: از قسمت‌های «الف» و «ب» نتیجه می‌گیریم $۸\in A$، $۱۳\in A$، $۱\in A$، $۲\in A$، $۴\notin A$ و $۱۱\notin A$. از قسمت «ج» هم معلوم می‌شود که $A\subset\{۱،۲،۴،۷،۸،۱۱،۱۳\}$. فقط باید تکلیف ۷ مشخص شود، یعنی باید مشخص شود $۷\in A$ یا $۷\notin A$. با کمی دقت در قسمت «ج» می‌توانید به این موضوع هم پی ببرید. [اگر برایتان معلوم نشد، یک بار فرض کنید $۷\in A$ و یک بار فرض کنید $۷\notin A$. در هر دو حالت مجموعه‌ی $A$ را با اعضایش تشکیل داده و مجموعه‌ی حاصل را جای $A$ در قسمت «ج» جایگزین کنید تا به جواب صحیح برسید.]




**۸-** با توجه به این‌که $A\cap B=\{b،۵\}$، نمودار ون به صورت مقابل است.

[معرفی یک مجموعه‌ی $C$ و یک مجموعه‌ی $D$ مناسب برعهده‌ی خودتان]

هر دو حکم قسمت‌های «الف» و «ب» قضایای کلی و همواره درست هستند.

**پرسش**: در مسأله‌ی فوق چند مجموعه‌ی $C$ متمایز و چند مجموعه‌ی $D$ متمایز وجود دارند؟

**پاسخ**: بی‌شمار مجموعه‌ی $C$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{a،b،c،۲،۵\}\subset C$ و چهار مجموعه‌ی $D$ وجود دارد به‌طوری‌که $D\subset\{b،۵\}$. در واقع $D$ هر یک از ۴ زیرمجموعه‌ی $\{b،۵\}$ می‌تواند باشد.

۹-

$$\left.\begin{array}{l} A\subset(A\cup B)\ ،\ B\subset(A\cup B) : \text{می‌دانیم} \\ (A\cup B)\subset C : \text{فرض} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{.........}\ ,\ \ \text{..........}$$

$$\left.\begin{array}{l} C\subset(A\cap B) : \text{فرض} \\ (A\cap B)\subset A ، (A\cap B)\subset B : \text{می‌دانیم} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{.........}\ ,\ \ \text{..........}$$

برای نتیجه‌گیری صحیح و پر کردن جاهای خالی فوق، می‌توانید به نتیجه‌ی آخر تمرین ۱۷ همین فصل (صفحه‌ی ۲۴ کتاب کار) نگاهی بیندازید.

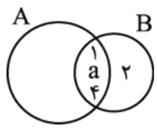
با پر کردن جاهای خالی فوق، معلوم می‌شود کدام ۲ گزینه از ۴ گزینه‌ی داده شده، همواره صحیح‌اند. [ضمناً رسم نمودارهای ون برعهده‌ی خودتان]

۱۰-

$$\left.\begin{array}{l} A\subset B : \text{فرض} \\ B\subset(B\cup C) : \text{می‌دانیم} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{..........} \qquad \left.\begin{array}{l} (A\cap C)\subset A : \text{می‌دانیم} \\ A\subset B : \text{فرض} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{..........}$$

اگر مشابه تمرین قبلی عمل کنید، معلوم می‌شود کدام ۲ گزینه، همواره درست‌اند. حال باید ۲ گزینه‌ی دیگر را با انتخاب مجموعه‌های مناسب رد کنید. برای رد یکی از آن‌ها کافی است $A \not\subset C$ و برای دیگری کافی است $C \not\subset B$.

۱۱- **راهنمایی:** قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» هر کدام یک مجموعه‌ی دو عضوی به‌دست می‌آیند. جواب قسمت «د» هم $\{۶\}$ است. در چهار قسمت آخر هم با مجموعه‌های تک عضوی $\{۸\}$، $\{۹\}$ و $\{۱۲\}$ مواجه می‌شویم.



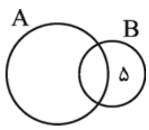

۱۲- **روش اول:** در نمودار ون مقابل، ابتدا اطلاعات $B - A = \{۲\}$ و $A \cap B = \{۱، a، ۴\}$ را وارد می‌کنیم.

حال شما $A \cup B = \{۱، ۲، ۳، ۴، a، b\}$ را نیز در این نمودار اعمال کنید تا به مراد دلتان برسید!

**روش دوم:** طبق قسمت «الف» تمرین ۶۳ همین فصل در صفحه‌ی ۳۱ داریم $(B - A) \cup (B \cap A) = B$ که به این ترتیب مجموعه‌ی $B$ را می‌یابیم. حال طبق تمرین ۵۴ همین فصل در صفحه‌ی ۳۰ داریم $A - B = (A \cup B) - B$. در نهایت مجدداً به تمرین ۶۳ قسمت «الف» برمی‌گردیم، یعنی $(A - B) \cup (A \cap B) = A$. والسلام!

۱۳- الف) **روش اول:** مسأله حلّه! $B - (B - A) = A \cap B \Rightarrow$

[بد نیست به تمرین ۵۵ همین فصل در صفحه‌ی ۳۰ نگاهی بیندازید.]




**روش دوم:** در نمودار ون مقابل، ابتدا داده‌ی $B - A = \{۵\}$ را وارد می‌کنیم.

حال داده‌های $B = \{۵، ۱، a، f\}$ را نیز بر این نمودار ون اِعمال کنید تا به جواب برسید.

**پرسش:** آیا می‌توان مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A$ و $A - B$ را به‌طور منحصر به فرد مشخص کرد؟ آیا ممکن است این مجموعه‌ها نامتناهی باشند؟

**پاسخ:** نمی‌توان $A \cup B$ ، $A$ و $A - B$ را مشخص کرد، حتی ممکن است این مجموعه‌ها نامتناهی باشند.

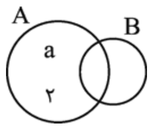
ب) **روش اول:**

$$(A - B) \cup B = A \cup B \Rightarrow A \cup B = \{a، ۲\} \cup \{۱، b\} = \{a، ۲، ۱، b\}$$

از طرفی می‌دانیم همواره $(A - B) \subset A \subset (A \cup B)$، بنابراین داریم $\{a، ۲\} \subset A \subset \{a، ۲، ۱، b\}$.

[بد نیست به تمرین ۵۶ همین فصل در صفحه‌ی ۳۰ نگاهی بیندازید.]

حال می‌توانید مجموعه‌ی $A$ را (با نیم نگاهی به تمرین ۲۹ همین فصل در صفحه‌ی ۲۶) حل کنید. برای $A$ چهار مجموعه‌ی متمایز، امکان‌پذیر است.



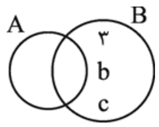

**روش دوم:** در نمودار ون مقابل، داده‌ی $A - B = \{a، ۲\}$ را وارد می‌کنیم.

از طرفی می‌دانیم $B = \{۱، b\}$. پس چهار حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

**۱۴-** الف)

$(A\cup B)-A=B-A\Rightarrow \cdots\cdots$

[بد نیست به تمرین ۵۴ همین فصل در صفحه‌ی ۳۰ نگاهی بیندازید.]

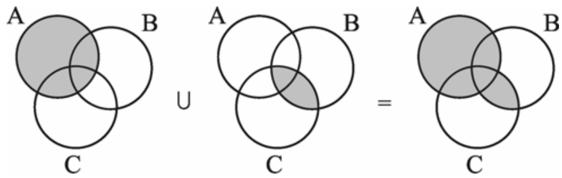


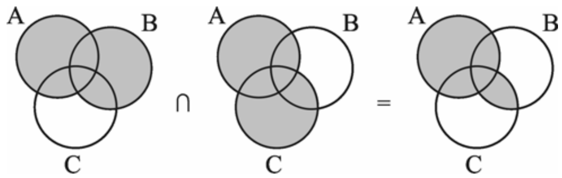

ب) جواب قسمت «الف» را در نمودار ون مقابل وارد می‌کنیم.

حال با توجه به $A=\{۲،a\}$، چهار حالت برای مجموعه‌ی $B$ می‌تواند وجود داشته باشد.

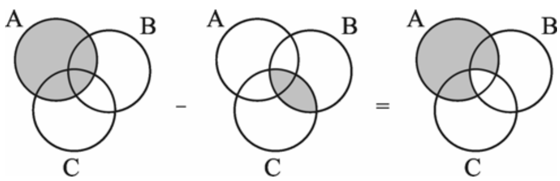
در واقع حل این مسأله مشابه با حل قسمت «ب» تمرین قبل است، یعنی باید $\{۳،b،c\}\subset B\subset\{۳،b،c،a،۲\}$. پس چهار حالت، متصور است:

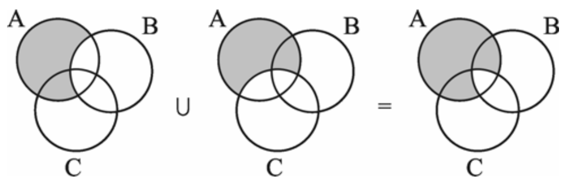

**۱۵-** الف)




د)




**۱۶-** متناهی: $A\cap B$ و $A-B$ نامتناهی: $A\cup B$ و $B-A$

[انتخاب مجموعه‌های $A$ و $B$ و به‌دست آوردن $A\cup B$، $A\cap B$، $A-B$ و $B-A$ برعهده‌ی خودتان]

**۱۷-** باید رقم سمت چپ ۱ و سایر ارقام (در صورت وجود) ۰ باشند. مثلاً ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ...

این مجموعه نامتناهی است. [نوشتن این مجموعه با نمادهای ریاضی برعهده‌ی خودتان]

**۱۸-** الف) **پرسش:** تعیین کنید هر یک از ۴ مجموعه، کدام‌یک از مجموعه‌های اعداد صحیح مثبت، منفی، نامثبت و نامنفی می‌باشد.

ب) **راهنمایی:** $A$ مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی، $B$ مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و $C$ مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت می‌باشند.

ج) اشتراک مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی و مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت برابر با $\{۰\}$ است.

**۱۹-** $n=۱\Rightarrow A_۱=\{k\in\mathbb{Z}\mid ۱-۲<k<۱+۲\}=\{k\in\mathbb{Z}\mid -۱<k<۳\}\Rightarrow A_۱=\{۰،۱،۲\}$

به همین ترتیب $A_۲$ و $A_۳$ نیز به‌دست می‌آیند که اگر اجتماع و اشتراک ۳ مجموعه را محاسبه کنیم، $\{۰،۱،۲،۳،۴\}$ و $\{۲\}$ به‌دست می‌آیند.

**پرسش:** $A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap A_۴$ را بیابید.

**۲۰-** دو تا از ۵ مجموعه‌ی داده شده برابر با مجموعه‌ی مضارب طبیعی عدد ۶ است که یکی از آن‌ها مجموعه‌ی $A$ است. [مجموعه‌ی دیگر را شما بیابید.]

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶، برابر با $\{۱،۲،۳،۶\}$ است. حال مشخص کنید کدام‌یک از ۵ مجموعه‌ی داده شده برابر با $\{۱،۲،۳،۶\}$ است.

**پرسش:** چه تعداد از ۵ مجموعه‌ی داده شده، متناهی است؟

**پاسخ:** یک مجموعه

**پرسش:** دو مجموعه از ۵ مجموعه‌ی داده شده در تمرین ۲۰، جزء جواب‌های این تمرین نیستند. نشان دهید این دو مجموعه برابرند.