جواب آخر و راهنمای حل برخی مسائل فصل ۱

اندازه‌گیری با اعداد طبیعی

۱- پنج مستطیل که کم‌ترین محیط ۲۴ سانتی‌متر است.

توجه: مربع یک نوع مستطیل است که اضلاع آن با یکدیگر برابرند.

۲- الف) چهار مکعب مستطیل ب) ۱۶

توجه: در طرح مسائلی همانند مسأله‌ی فوق، دقت کنید که گاهی حجم کوچک‌تر در حجم بزرگ‌تر نمی‌گنجد. مثلاً مکعب مستطیل ۴×۱×۱ در مکعب مستطیل ۲×۲×۲ نمی‌گنجد.

※ مسائل ۱ و ۲ ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را می‌توانید در انتهای این بخش مطرح کنید.

اعداد صحیح

۳- ۸ و ۷ و ۷- و۳

۴- ب) ۶ و ۸ ج) $AB' = BA' = ۱$

۵- هدف از این مسأله آن است که دریابیم قرینه‌ی صفر، خودش است. (در این مسأله C و C' هر دو همان مبدأ هستند و $CC' = ۰$)

۶- شش جمله نادرست است که مثال نقض اکثر آن‌ها هم عدد صفر است.

۷- میزان پس‌انداز برابر است با درآمد منهای مخارج؛ بنابراین داریم:

تعداد روزهای تابستان = ۳ × ۳۱ = ۹۳ ← درآمد = ۹۳ × ۳۳۰۰

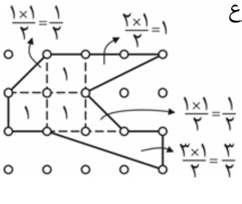
پس‌انداز = درآمد - مخارج = ۹۳۱۰۰-

علامت منفی نشان می‌دهد که میزان پس‌انداز، منفی است و در نتیجه حسن بدهکار می‌شود. به‌عبارت دیگر باید ۹۳۱۰۰ تومان قرض بگیرد.

اعداد گویا

۸- ب) اگر به اعداد طبیعی یا صحیح، مخرجِ یک بدهیم، طبق تعریفِ عدد گویا معلوم می‌شود که گویا هستند.

۹- شکل را به ۳ مربع و ۴ مثلث تقسیم می‌کنیم و مساحت هر قسمت را به‌دست می‌آوریم. مساحت کل برابر است با مجموع مساحت‌های مربع‌ها و مثلث‌ها.



۱۰- در قسمت‌های «الف» و «ب» مقایسه‌ی دو کسر با مخرج یا صورت برابر مدنظر است. در قسمت «ج» طرفین وسطین (یا یکی کردن مخرج‌ها) مدنظر است:

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۹}{۵\times ۹} \quad \text{و} \quad \frac{۷}{۹}=\frac{۷\times ۵}{۹\times ۵} \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{مخرج‌ها}} ۴\times ۹ > ۷\times ۵ \ \text{(همان طرفین ـ وسطین است)}$$

در قسمت‌های «د» و «ه» باید ابتدا عدد اعشاری یا مرکب را به‌صورت یک کسر گویا نوشت. در قسمت «و» دانش‌آموز باید مراقب باشد تا اشتباهاً طرفین وسطین نکند. در قسمت‌های «ز» و «ح» هم مقایسه‌ی دو عدد منفی مدنظر است.

※ در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۳ بخش مربوط به دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۱۱- الف) برای مقایسه‌ی $\frac{۲۱}{۸}$، $\frac{۱۳}{۵}$، $\frac{۱۱}{۴}$ و $\frac{۸}{۳}$ دو روش وجود دارد. یکی مقایسه‌ی دو به دوی کسرها و دیگری هم‌مخرج کردن تمام کسرها (که در این‌جا مخرج مشترک چهار کسر برابر با ۱۲۰ است). بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد، $\frac{۱۱}{۴}$ و $\frac{۱۳}{۵}$ می‌باشند.

ب) هدف از این تمرین آن است که اشاره‌ای به نکات زیر شود:

اگر $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ بوده و $b، d \in \mathbb{N}$ باشند، آن‌گاه $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

هم‌چنین میانگین اعداد حقیقی و متمایز a و b بین این دو عدد قرار دارد؛ یعنی $b > \frac{a+b}{۲} > a$.

در این تمرین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد، $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ هستند اما مقایسه‌ی ۲ عدد دیگر برعهده‌ی خودتان.

توجه: در پیدا کردن اعداد گویا بین دو عدد گویا، بهتر است از روش کتاب درسی یعنی هم‌مخرج کردن دو عدد استفاده شود و به روش‌های دیگر فقط اشاره شود.

۱۲- برای پیدا کردن n عدد گویا بین دو عدد گویای هم‌مخرج که صورت‌های آن‌ها اعداد صحیح متوالی باشند، کافی است صورت و مخرج دو عدد گویای هم‌مخرج را در $n+۱$ ضرب کنیم.

ب) $\frac{۴}{۹}, \frac{۵}{۹} \xrightarrow{\text{یک عدد}} \frac{۴\times۲}{۹\times۲}, \frac{۵\times۲}{۹\times۲} \rightarrow \frac{۸}{۱۸}, \mathbf{\frac{۹}{۱۸}}, \frac{۱۰}{۱۸}$

ج) $\frac{۴}{۹}, \frac{۵}{۹} \rightarrow \frac{۴\times۳}{۹\times۳}, \frac{۵\times۳}{۹\times۳} \rightarrow \frac{۱۲}{۲۷}, \mathbf{\frac{۱۳}{۲۷}}, \mathbf{\frac{۱۴}{۲۷}}, \frac{۱۵}{۲۷}$

۱۳- الف) راهنمایی: صورت و مخرج $\frac{۴}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ را در عدد ۴ ضرب کنید.

ب) $\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۳} \rightarrow \frac{-۳}{۶}, \frac{-۲}{۶} \rightarrow \frac{-۳\times۴}{۶\times۴}, \frac{-۲\times۴}{۶\times۴} \rightarrow \dots$

ج) $\frac{۱۴}{۳}$ و $\frac{۱۶}{۳}$ هم‌مخرج‌اند اما صورت آن‌ها اعداد متوالی نیستند و $\frac{۱۵}{۳}$ در وسط دو کسر قرار دارد. پس کافی است یک عدد بین $\frac{۱۴}{۳}$ و $\frac{۱۵}{۳}$ و یک عدد بین $\frac{۱۵}{۳}$ و $\frac{۱۶}{۳}$ به‌دست آوریم. بنابراین:

$\frac{۱۴}{۳}, \frac{۱۶}{۳} \rightarrow \frac{۱۴\times۲}{۳\times۲}, \frac{۱۶\times۲}{۳\times۲} \rightarrow \dots$

د) باز هم مانند قسمت قبل، عدد $\frac{۰}{۵}$ بین $\frac{۱}{۵}$ و $-\frac{۱}{۵}$ قرار دارد، بنابراین:

$\frac{-۱}{۵}, \frac{۱}{۵} \rightarrow \frac{-۱\times۲}{۵\times۲}, \frac{۱\times۲}{۵\times۲} \rightarrow \dots$

۱۴- کافی است صورت و مخرج $\frac{۰}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ را در ۱۰ یا ۱۰۰۰ ضرب کنیم. به همین ترتیب می‌توان بی‌شمار عدد گویا بین هر دو عدد گویای متمایز به‌دست آورد. در نتیجه دو عدد گویای متوالی وجود ندارد. (اما اعداد صحیح متوالی وجود دارند.)

۱۵- این دو کسر برابرند، یعنی متمایز نیستند. بنابراین سیاوش درست می‌گوید. (نشان دهید هر دو کسر برابر با $\frac{۱۱}{۱۳}$ هستند.)

مسائل محاسباتی اعداد گویا

۱۶- $\frac{۸}{۷}$ و $-\frac{۳}{۵}$ و $-\frac{۱}{۲۲}$

۱۷- ۴ نفر

۱۸- ۱۲ نفر

۱۹- سالانه ۷۶۵۰۰۰ تومان

۲۰- هر کدام ۱۲ تمرین حل کرده‌اند.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۴ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

نمایش اعشاری و اعداد اعشاری

۲۲- $\frac{۱}{۴۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰۰}+۰$ قسمت اعشاری $= ۰/۰۲۵۰ = ۰/۰۲۵$ ب) قسمت صحیح $= ۰$

۲۳-

$$۲/۵ = ۲ + \frac{۵}{۱۰} = \frac{۲۵}{۱۰} = \frac{۲۵۰}{۱۰۰} \qquad ۲/۴۸ = ۲ + \frac{۴۸}{۱۰۰} = \frac{۲۴۸}{۱۰۰}$$

$$\frac{۲۴۸}{۱۰۰}, \frac{۲۵۰}{۱۰۰} \to \frac{۲۴۸ \times ۳}{۱۰۰ \times ۳}, \frac{۲۵۰ \times ۳}{۱۰۰ \times ۳} \to \frac{۷۴۴}{۳۰۰}, \frac{۷۵۰}{۳۰۰} \Rightarrow \dots$$

توجه: ۲۴۸ و ۲۵۰ (صورت‌های دو کسر هم‌مخرج $\frac{۲۴۸}{۱۰۰}$ و $\frac{۲۵۰}{۱۰۰}$) اعداد صحیح متوالی نبودند و ۲۴۹ بین آن‌ها قرار داشت. در نتیجه نیازی به ضرب صورت و مخرج کسرهای $\frac{۲۴۸}{۱۰۰}$ و $\frac{۲۵۰}{۱۰۰}$ در عدد ۵ نبود و ضرب صورت و مخرج‌ها در ۳ کفایت می‌کرد.

۲۴- ۲۸۸۰ ، ۵/۲۹۴ ، ۹/۵۵ ، ۰/۱۶۶۴ ، ۴/۲-

ب) $۰/۰۵۲ \times ۳/۲ = \frac{۵۲}{۱۰۰۰} \times \frac{۳۲}{۱۰} = \dots$

هـ) $(۰/۰۰۰۴ \div ۰/۰۸) + (۱/۲۳ \times ۴/۳) = \frac{۴}{۱۰۰۰۰} \times \frac{۱۰۰}{۸} + ۵/۲۸۹ = \frac{۱}{۲۰۰} + ۵/۲۸۹ = ۰/۰۰۵ + ۵/۲۸۹ = ۵/۲۹۴$

۲۵-

$\frac{۱۲۶}{۳۰۰} = ۰/۴۲$; $\frac{-۱}{۲/۵} = \frac{-۴}{۱۰} = -۰/۴$; $-\frac{۲۱}{۵۰} = -۰/۴۲$; ب) $۰/۰۴۱ \times ۱۰ = ۰/۴۱$

* در این‌جا می‌توان مسائل ۵ و ۶ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۲۶- الف) راهنمایی: باید کسرهای $\frac{۲۴}{۳۰}$، $\frac{۳۳}{۴۰}$ و $\frac{۷۹}{۱۰۰}$ مقایسه شوند.

ب) $\frac{۷۹}{۱۰۰} = \frac{?}{۲۰} \to \frac{۲۰ \times ۷۹}{۱۰۰} = ۱۵/۸$ و ...

ج) $\frac{۳۳}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۸۲/۵\%$ و ...

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۷ تمرینات ویژه‌ی سخت کوشان را مطرح کرد.

۲۷- ۴۰، ۷/۵ و ۱ درصد

۲۸- هشت درصد افزایش [راهنمایی: $۱ - \frac{۹۰}{۱۰۰} \times \frac{۱۲۰}{۱۰۰}$]

۲۹- الف) ۱۸ درصد [راهنمایی: $۱۰۰ \times \frac{\text{میزان تخفیف}}{\text{قیمت اولیه}} =$ درصد تخفیف $\Leftarrow$ تومان $۶۳۰ = ۲۸۷۰ - ۳۵۰۰ =$ میزان تخفیف]

ب) ۲۰ درصد [راهنمایی: قیمت خرید – قیمت فروش = میزان سود و $۱۰۰ \times \frac{\text{میزان سود ۶ خودکار}}{\text{قیمت خرید ۶ خودکار}} = ۱۰۰ \times \frac{\text{میزان سود یک خودکار}}{\text{قیمت خرید یک خودکار}} =$ درصد سود]

۳۰- باید محاسبه کنید که $\frac{۶}{۱۶}$ معادل چند درصد است.

۳۱- ۱۲۰۰ و ۱۴۴۰؛ پس از دو سال قیمت فعلی کالا به میزان ٪۴۴ افزایش می‌یابد.

۳۲- الف) ۱۲ درصد   ب) سانتی‌متر مکعب $۳۸۷/۲ = ۴۴۰ \times ۰/۱۲ - ۴۴۰$ ج) ۲۲/۵۶ درصد

۳۳- ۵ درصد سود [راهنمایی: ۸ درصد از ۵۰ سیب برابر با ۴ است، بنابراین ناصر ۴۶ سیب را به قیمت هر عدد ۲۱۰ تومان فروخته است که درآمد او ۲۱۰×۴۶ تومان خواهد بود. با توجه به این‌که این درآمدش بیشتر از هزینه‌ی او یعنی ۹۲۰۰ تومان است، بنابراین ناصر سود کرده است که میزان این سود برابر است با تفاضل هزینه از درآمد. درصد سود هم برابر است با: $۱۰۰ \times \frac{\text{میزان سود}}{\text{میزان هزینه}}$]

* در این‌جا می‌توان مسائل ۸ و ۹ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

اعداد حقیقی

۳۴- پنج جمله نادرست می‌باشند. مثلاً از تقسیم اعداد طبیعی بر صحیح، نمی‌توان عدد گویای صفر را به‌دست آورد. در ضمن بد نیست به نکـاتی در مـورد اعداد اعشاری اشاره شود:

هر عدد طبیعی یا صحیح، عددی اعشاری است. اما برخی اعداد گویا ممکن است عدد اعشاری نباشند (در تمرین ۴۸ به همین موضوع پرداختـه شـده است). توجه شود که هر عدد اعشاری الزاماً عددی گویا است.

پرسش: عددی غیر رادیکالی مانند π، گنگ است یا گویا؟

۳۵- ب) صفر عددی گویا است. در مورد معکوس آن چه می‌توان گفت؟

ج) فقط خارج قسمت ممکن است گویا نباشد (در صورتی که مقسوم علیه، صفر باشد).

د) تمام موارد با مثال نقض رد می‌شوند:

$$\sqrt{۲}+(۱-\sqrt{۲})=۱ \quad , \quad \sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۰ \quad , \quad \sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=(\sqrt{۵})^{۲}=۵ \quad , \quad \frac{-\sqrt{۷}}{\sqrt{۷}}=-۱$$

۳۶- ب) یک عدد گنگ در کدام عدد گویا ضرب شود، تا حاصل‌ضرب برابر با صفر شود؟

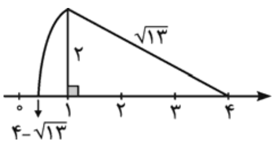
۳۷- هدف از قسمت‌های «ب» و «ج» اشاره به تفاوت π و ۳/۱۴ است (۳/۱۴ تقریب اعشاری π تا دو رقم اعشار است و تقریب‌های اعشاری اعداد گنـگ، گویا هستند.). برای دادن پاسخ به قسمت‌های «د» و «ح» بهتر است نگاهی به تمرین قبل (۳۶) بیندازید.

در قسمت «ط» کسر $\frac{۲/۳۱}{-۰/۷}$ برابر با $-\frac{۲۳۱}{۷۰}$ است. نکته‌ی حائز اهمیت در این قسمت آن است که تقسیم دو عدد اعشاری الزاماً عـددی گویـا اسـت مشروط بر آن که مخرج غیرصفر باشد.

۳۸ و ۳۹- طول پاره‌خط AB در دو تمرین، برابر با $۲\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۶}$ است.

۴۰-

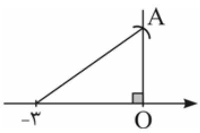
$$۲-(\sqrt{۱۳}-۲)=۲-\sqrt{۱۳}+۲=۴-\sqrt{۱۳}$$



۴۱- باید ۵۰ را به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی بنویسیم:

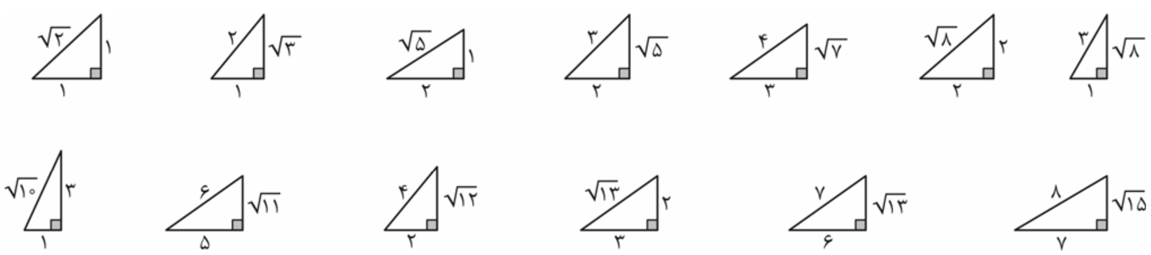
$$۵۰=۱^{۲}+۷^{۲}=۵^{۲}+۵^{۲} \to ۱,۷,\sqrt{۵۰} \qquad ۵,۵,\sqrt{۵۰} \Rightarrow \text{محیط‌ها}=۱۰+\sqrt{۵۰} \text{ و } ۸+\sqrt{۵۰}$$

۴۲- ب) در مبدأ (نقطه‌ی O) نیم‌خطی عمود بر محور اعداد رسم می‌کنیم. حال نوک پرگار را در نقطـه‌ی متنـاظر بـا ۳- قـرار داده و کمـانی بـه شـعاع ۴ می‌زنیم. این کمان خط عمود بر محور را در نقطه‌ی A قطع می‌کند که طبعاً $OA=\sqrt{۷}$ خواهد بود.



حال کافی است نوک پرگار را در نقطه‌ی O (مبدأ) قرار داده و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و کمانی بزنیم تا محور را در نقاط متناظر با $\sqrt{۷}$ و $-\sqrt{۷}$ قطع کند.

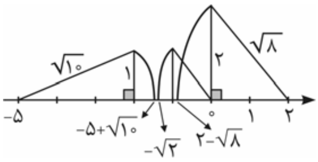
توجه: برای رسم $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$، $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۱۱}$، $\sqrt{۱۲}$، $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۱۵}$ می‌توان از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی زیر استفاده کرد:



پرسش: آیا مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری وجود دارد که طول دو ضلع آن، اعداد طبیعی و طول یک ضلع آن $\sqrt{۱۵}$ باشد؟

پاسخ: بله. مثلثی با وتر به طول ۴ و اضلاع قائمه به طول‌های ۱ و $\sqrt{۱۵}$

❋ مسائل ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ بخش ویژه‌ی سخت‌کوشان می‌تواند در این‌جا مطرح شود.



۴۳- برای رسم $۲-\sqrt{۸}$ باید $\sqrt{۸}$ واحد سمت چپ نقطه‌ی ۲ را بیابیم و برای رسم $\sqrt{۱۰}-۵$ یا همان $-۵+\sqrt{۱۰}$ باید $\sqrt{۱۰}$ واحد سمت راست ۵- را به‌دست آوریم:

* مسأله‌ی ۱۳ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش در این‌جا قابل طرح است.

تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

۴۴-

$\sqrt{۱۰} \to \sqrt{۹}$ $\quad$ $\sqrt{۳۷} \to \sqrt{۳۶}$ $\quad$ $\sqrt{۶۳} \to \sqrt{۶۴}$ $\quad$ $\sqrt{۱۵} \to \sqrt{۱۶}$ $\quad$ $\sqrt{۸۰} \to \sqrt{۸۱}$

$۱/۳۸ + ۴/۶۴ = ۶/۰۲ \to ۶$ $\quad$ $۹۸ \to ۱۰۰$ $\quad$ $۵۹۷ \to ۶۰۰$ $\quad$ $\pi \to ۳$

۴۵- اگر این عدد را x فرض کنیم، داریم:

$$۲/۴۱۶ < x < ۲/۴۱۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲/۴ < x < ۲/۵ \Rightarrow \text{تقریب اعشاری تا یک رقم اعشار} = \cdots \\ ۲/۴۱ < x < ۲/۴۲ \Rightarrow \text{تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار} = \cdots \\ ۲/۴۱۶ < x < ۲/۴۱۷ \Rightarrow \text{تقریب اعشاری تا سه رقم اعشار} = \cdots \end{cases}$$

پرسش: آیا می‌توانیم تقریب اعشاری عدد x تا چهار رقم اعشار را مشخص کنیم؟

۴۶- تنها $\frac{۵۸}{۴۰}$ عدد اعشاری است اما $\frac{۱۰}{۳}$ و $\frac{۲}{۷}$ اعداد اعشاری نیستند.

* مسأله‌ی ۱۴ بخش ویژه‌ی سخت‌کوشان می‌تواند این‌جا مطرح شود.

۴۷- ۰/۱۱۷ و ۸/۵۳۶

۴۸-

$$\overset{\times ۳}{۹۰} + \overset{\times ۳}{۳۰} + ۱۰ + \overset{\div ۳}{\frac{۱۰}{۳}} + \overset{\div ۳}{\frac{۱۰}{۹}} = ۱۳۰ + \frac{۳۰+۱۰}{۹} = \frac{۱۱۷۰+۴۰}{۹} = \frac{۱۲۱۰}{۹} = ۱۳۴/\overline{۴} \xrightarrow{\hspace{2em}} \text{تقریب تا یک رقم اعشار} = \cdots$$

عدد گویای $\frac{۱۲۱۰}{۹}$ عدد اعشاری نیست.

۴۹- راهنمایی: مساحت اولیه $S_۱ = \pi r_۱^۲$ و مساحت ثانویه $S_۲ = \pi r_۲^۲$ است که در آن‌ها $r_۱ = ۳$ ، $r_۲ = ۳/۱$ و $\pi \simeq ۳/۱$ می‌باشد. حال کافی است $S_۲ - S_۱$ را بیابیم که این مقدار تقریباً ۱/۸۹۱ سانتی‌متر مربع به‌دست می‌آید.

۵۰- راهنمایی: حجم اولیه $V_۱ = \frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳$ و حجم ثانویه $V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi r_۲^۳$ است که در آن‌ها $r_۱^۳ = ۱۱^۳ \simeq ۱۳۳۰$ ، $r_۲^۳ = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$ و $\pi \simeq ۳/۱۴$ می‌باشد.

اختلاف $V_۱$ و $V_۲$ میزان کاهش حجم توپ را نشان می‌دهد که تقریباً ۱۳۸۱/۶ سانتی‌متر مکعب به‌دست می‌آید.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۵ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۵۱- راهنمایی: با محاسبه‌ی مقادیر $\frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۳} - \frac{۳۷}{۱۰۰}$ و مقایسه‌ی بین آن دو، جواب به‌دست می‌آید و مشخص می‌شود که ۰/۳ به $\frac{۱}{۳}$ نزدیک‌تر است.

* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۶ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

قدرمطلق

۵۲- راهنمایی: در هر قسمت باید قدرمطلق‌های دو عدد مقایسه شوند.

۵۳- باید قدرمطلق تفاضل دو عدد را بیابیم. مثلاً:

الف) $|۲/۷ - \frac{۱۳}{۵}| = |\frac{۲۷}{۱۰} - \frac{۱۳}{۵}| = |\frac{۲۷-۲۶}{۱۰}| = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$

د) $|\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - (-\pi)| = |\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \pi| = \sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \pi \simeq ۱/۴۱۴ + ۱/۷۳۲ + ۳/۱۴۱ = ۶/۲۸۷$

۵۴- در هر قسمت باید معلوم شود عبارت داخل قدرمطلق، عددی مثبت یا منفی است.

ج) $\left|\underbrace{\dfrac{\sqrt{۳}-۱}{-۲}}_{\text{منفی است}}\right| = -\dfrac{\sqrt{۳}-۱}{-۲} = \dfrac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

هـ) $\left|۳-\pi+۲\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}-۱\right)\right| = |۳-\pi+\sqrt{۳}-۲| = |\underbrace{۱+\sqrt{۳}-\pi}_{\text{منفی است}}| = -(۱+\sqrt{۳}-\pi) = -۱-\sqrt{۳}+\pi$

ز) $|\underbrace{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}_{\text{منفی است}}| - |\underbrace{۱-\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}_{\text{منفی است}}| = -(\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) + (۱-\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) = -\sqrt{۳}+\sqrt{۵}+۱-\sqrt{۳}-\sqrt{۵} = ۱-۲\sqrt{۳}$

۵۵- ۴ و ۹ و ۲۱-

※ در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۱۷ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

نمادها و زبان ریاضی

۵۶- الف) $-\dfrac{۴۸}{۵} = -۱۰ + ۰/۴$

ب) $\dfrac{۱}{۳}(۹^۲) - ۱۵ = ۳ \times (۲\times ۲)$

ج) اگر حاصل جمع ۲- و ۴ را در ۶ ضرب کنیم، برابر می‌شود با حاصل‌ضرب ۳ در ۴.

د) تفاضل ۵ از ربع ۶۰، کوچک‌تر از نصف ۳۰ است.

شکل دیگر جمله‌ی «الف»: قرینه‌ی خارج‌قسمت تقسیم ۴۸ بر ۵، برابر با مجموع ۱۰- و ۰/۴ است (یا برابر است با ۱۰- به علاوه‌ی ۰/۴).

اگر در قسمت «الف» عدد ۰/۴ وجود نداشت: $-۱۰ > -\dfrac{۴۸}{۵}$

۵۷- جواب‌ها به صورت درهم (!):

مربع (مجذور) هر عدد غیرصفر، مثبت است.

جذر مجذور یک عدد، برابر با قدرمطلق آن عدد است.

قدرمطلق یک عدد منفی برابر با قرینه‌ی آن عدد است.

مکعب مجموع سه عدد برابر با مجموع مکعبات آن‌ها نیست.

اگر عددی بین صفر و یک باشد، مربع آن کوچک‌تر از خودش است.

عددی به اضافه‌ی عدد دیگر، برابر است با عدد دوم به اضافه‌ی عدد اول.

اگر حاصل‌ضرب سه عدد برابر با صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

مربع (مجذور) مجموع دو عدد، مساوی است با مجموع مربعات (مجذورات) آن دو عدد به اضافه‌ی دو برابر حاصل‌ضرب آن‌ها.

۵۸- برخی جواب‌ها به صورت درهم:

$|a|^۲ = (-a)^۲$

$\dfrac{x}{۲} - \dfrac{x}{۳} = \dfrac{x}{۶}$

$x^۲+y^۲ \not< ۰$ یا $x^۲+y^۲ \geq ۰$

$(x+y)^۲ - (x^۲+y^۲) = ۲xy$

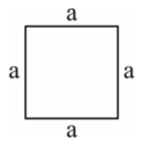
اگر $a > ۰$، در این صورت $\sqrt{a} > ۰$.

اگر $x > y$، در این‌صورت $x^۳ > y^۳$.

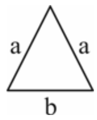
اگر $xy = ۰$، در این‌صورت $x = ۰$ یا $y = ۰$.

※ مسائل ۱۸ و ۱۹ بخش ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش می‌تواند این‌جا مطرح شود.

۵۹- محیط مربعی به ضلع a

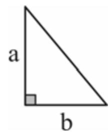


محیط مثلث متساوی‌الساقینی به ساق a و قاعده‌ی b



طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه‌ی a و b

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه‌ی a و b



۶۱- راهنمایی: نشان دهید عبارت داده شده برابر با $(a-b)^{۲}$ است.

۶۲-

ب) $xy^{۲}z + xz = x \times y^{۲} \times z + x \times ۱ \times z = \cdots$

ج) $۲x^{۲} - ۲ax + ۴x = ۲ \times x \times x - ۲ \times a \times x + ۲ \times ۲ \times x = \cdots$

در قسمت «ب» از طرف چپ x را فاکتور بگیرید و از طرف راست z را فاکتور بگیرید.

در قسمت «ج» از طرف چپ ۲ را فاکتور بگیرید و از طرف راست x را فاکتور بگیرید.

۶۳- جمله‌ی علی به زبان ریاضی: $۲۵۰ = ۲۵۱ \times ۲۵۰ - ۲۵۰^{۲}$ (تشخیص درست یا غلط بودنش برعهده‌ی خودتان).

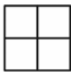
* در این‌جا می‌توان مسأله‌ی ۲۰ تمرینات ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت‌کوش را مطرح کرد.

۶۴- ۳، ۷، ۱۰ و $ab + ۳y + ۱۸a$

مسائل ویژه‌ی دانش‌آموزان سخت کوش

۱- پنج مکعب مستطیل با حجم‌های ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۶ و ۱۸

۲- مساحت تمام شکل‌ها ۴ سانتی‌متر مربع است ولی کم‌ترین محیط ۸ سانتی‌متر است. (محیط سایر شکل‌ها ۱۰ سانتی‌متر است.)



۳- هر دو عدد $\frac{۱۰۲}{۱۰۳}$ و $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ کوچک‌تر از ۱ هستند. یعنی نقاط متناظر با $\frac{۱۰۲}{۱۰۳}$ و $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ در طرف چپ نقطه‌ی متناظر با ۱ روی محور اعداد می‌باشند. فاصله‌ی $\frac{۱۰۲}{۱۰۳}$ از ۱، برابر با $\frac{۱}{۱۰۳}$ است و فاصله‌ی $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ از ۱، برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۳}$ است. در نتیجه $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ به ۱ نزدیک‌تر است. (حال با این اطلاعات، نقاط متناظر با ۱، $\frac{۱۰۲}{۱۰۳}$ و $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ را روی محور اعداد مشخص کنید تا معلوم شود که نقطه‌ی متناظر با $\frac{۱۰۰۲}{۱۰۰۳}$ در سمت راست یا چپ نقطه‌ی متناظر با $\frac{۱۰۲}{۱۰۳}$ می‌باشد.)

۴- الف) اگر ۳ تا از کالای A را در آسانسور بگذاریم، هنوز به اندازه‌ی ۶ تا از کالای A را می‌توان در آسانسور قرار داد. حال باید ببینیم ۶ تا از کالای A هم‌وزن با چند تا از کالای B است. [جواب: ۴ تا]

ب) قیمت ۴۵ روان‌نویس معادل قیمت ۴۸ خودکار و ۴۰ ماژیک است. [جواب: ۱۲ خودکار]

۵- جواب هر دو پرسش «خیر» است. [راهنمایی: دو عدد مثال بزنید که مجموع قسمت‌های اعشاری آن‌ها بزرگ‌تر از ۱ باشد.]

۶- تقسیم دو عدد اعشاری ممکن است عدد اعشاری نباشد، مثلاً $\frac{۰/۱}{۰/۳}$ عدد اعشاری نیست.

۷- الف) ۱۲۰ و ۴۰- / ب) ۷۵ و ٪۶۲/۵

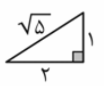
۸- محیط تغییر نمی‌کند ولی مساحت ٪۲/۲۵ کاهش می‌یابد. [راهنمایی: ابتدا مربعی به ضلع ۲ متر داریم که تبدیل می‌شود به مستطیلی به ابعاد ۲/۳ و ۱/۷.]

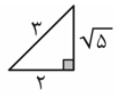
۹- الف) قیمت نهایی و قیمت اولیه برابرند زیرا $۱/۲۵ \times ۰/۸ = ۱$. توجه کنید که نمی‌توانیم بگوییم ۲۵ درصد افزایش و سپس ۲۰ درصد کاهش، معادل است با ۵ درصد (٪۲۰ - ٪۲۵+) افزایش قیمت. زیرا ٪۲۵ افزایش روی قیمت اولیه اِعمال می‌شود ولی ٪۲۰ کاهش روی قیمت ثانویه (قیمت پس از افزایش) اِعمال می‌شود.

ب) ۶۰ هکتار [راهنمایی: ۰/۸۵ مساحت اولیه‌ی زمین $(۱ - ۰/۱۵ = ۰/۸۵)$، برابر با ۵۱ هکتار است. به عبارت دیگر $\frac{۸۵}{۱۰۰} = \frac{۵۱}{x}$]

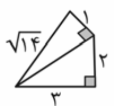
۱۰- $(\sqrt{۵})^۲ = ۲^۲ + ۱^۲$ و $۳^۲ = (\sqrt{۵})^۲ + ۲^۲$

(شما نیز دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متمایز ارائه دهید که طول دو ضلع آن‌ها اعداد طبیعی و طول ضلع سومش $\sqrt{۸}$ باشد.)

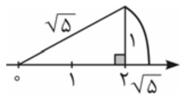


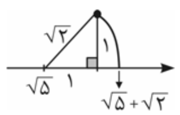


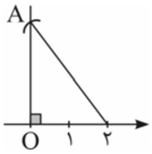
۱۱- الف) راهنمایی: برای رسم $\sqrt{۱۴}$ و $\sqrt{۶}$ از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی مقابل کمک بگیرید:



ب) ابتدا $\sqrt{۵}$ را روی محور به‌دست می‌آوریم و سپس از $\sqrt{۵}$ به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ واحد به سمت راست می‌رویم:





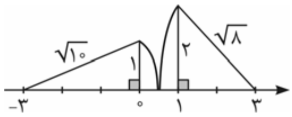


۱۲- این نقطه می‌تواند متناظر با اعداد ۲ یا $-۲\sqrt{۳}$ باشد. بهترین روش برای رسم $-۲\sqrt{۳}$ آن است که توجه داشته باشیم $-۲\sqrt{۳} = -\sqrt{۲^۲ \times ۳} = -\sqrt{۱۲}$.

کافی است در مبدأ، نیم‌خطی را بر محور اعداد عمود کنیم و نوک پرگار را در نقطه‌ی متناظر با عدد ۲ قرار داده و کمانی به شعاع ۴ واحد بزنیم تا نیم‌خط را در نقطه‌ی A قطع کند. طول پاره‌خط OA برابر با $\sqrt{۱۲}$ خواهد بود. (چرا؟)

حال اگر نوک پرگار را روی مبدأ قرار دهیم و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و دایره‌ای رسم کنیم، محور را در نقاط $۲\sqrt{۳}$ و $-۲\sqrt{۳}$ قطع خواهد کرد.

۱۳-



$$\sqrt{۱۰} - ۳ \simeq ۳ - \sqrt{۸} \Rightarrow \sqrt{۱۰} + \sqrt{۸} \simeq ۳ + ۳ = ۶$$

۱۴- $\frac{\sqrt{۳}}{۳} \simeq ۰/۵۷$ و از طرفی $۰/۵۵ = \frac{۱۱}{۲۰}$. حال باید سه عدد گویا بین $\frac{۵۷}{۱۰۰}$ و $\frac{۵۵}{۱۰۰}$ (یا به عبارت دیگر $\frac{۱۱۴}{۲۰۰}$ و $\frac{۱۱۰}{۲۰۰}$) بیابیم.

۱۵- الف) یک سال مشتری برابر با $۳۶۵ \times ۱۱/۸۵۸$ روز زمین و در نتیجه برابر با $۲۴ \times ۳۶۵ \times ۱۱/۸۵۸$ ساعت است. حال باید تقریب این گونه زده شود:

$$۱۱/۸۵۸ \simeq ۱۲ \ ; \ ۳۶۵ \simeq ۳۶۰ \ ; \ ۲۴ = ۲۴$$

بنابراین داریم:

$$۱۱/۸۵۸ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \simeq ۱۲ \times ۳۶۰ \times ۲۴ = ۱۲ \times ۱۲ \times ۳۰ \times ۱۲ \times ۲ = ۶۰ \times ۱۲^۳ = ۶۰ \times ۱۷۲۸ = ۱۰۳۶۸۰ \text{ ساعت}$$

ب) ابتدا توجه کنید که ۴۸ دقیقه برابر با ۰/۸ ساعت است زیرا:

دقیقه	ساعت	
۶۰	۱	
۴۸	?	$\rightarrow = \frac{۴۸}{۶۰} = \frac{۸}{۱۰}$

بنابراین هر روز مشتری برابر با ۹/۸ ساعت است و در نتیجه یک سال مشتری تقریباً ۱۰۵۸۰ روز مشتری است زیرا:

$$\frac{۱۰۳۶۸۰}{۹/۸} \simeq ۱۰۵۸۰$$

۱۶- $\sqrt{۱۰} < \frac{۶۳}{۲۰} < \frac{۲۲}{۷} < \pi < \frac{۱۵۶}{۲۰}$ [باید بررسی کنیم کدام‌یک از اعداد $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۱۵۶}{۲۰}$ به عدد π نزدیک‌تر است. برای این کار، کافی است $\pi - \frac{۲۲}{۷}$ و $\pi - \frac{۱۵۶}{۲۰}$ را با یکدیگر مقایسه کنیم.]

۱۷- راهنمایی: $۰ < \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - \pi$ ، $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \pi - ۱ < ۰$ و $\pi^۲ - ۱۰ < ۰$.

[توجه کنید که $۰ < \pi < ۳/۱۶ \Rightarrow \pi^۲ < (۳/۱۶)^۲ \Rightarrow \pi^۲ < ۱۰ \Rightarrow \pi^۲ - ۱۰ < ۰$]

۱۸- الف) مجذور عدد a به علاوه‌ی ۱، بزرگ‌تر یا مساوی قرینه‌ی ۲ برابر آن عدد (a) است.

ب) قدرمطلق مجموع دو عدد، بزرگ‌تر از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد نیست.

ج) میانگین دو عدد متمایز، بین آن دو عدد قرار دارد.

د) $(a + b + c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + ac + bc)$

هـ) $|a| = |-a|$

۱۹- چهار گزینه‌ی دیگر (به جز جواب) به زبان فارسی:

«جذر تفاضل معکوس‌های دو عدد متمایز»، «معکوس تفاضل مجذورهای دو عدد متمایز» ، «مجذور معکوس تفاضل دو عدد متمایز» و «جذر معکوس تفاضل دو عدد متمایز»

۲۰- اگر قطر دایره‌ی بزرگ را D فرض کنیم، داریم $d + d' + d'' = D$. از طرفی محیط نیم‌دایره‌ی بزرگ برابر با $\frac{\pi D}{۲}$ است و مجموع محیط‌های سه نیم‌دایره‌ی کوچک برابر است با:

$$\frac{\pi d}{۲} + \frac{\pi d'}{۲} + \frac{\pi d''}{۲} = \frac{\pi}{۲}(d + d' + d'') = \frac{\pi}{۲} D$$